

Corrigé

Interférences – Notion de cohérence



EXERCICE I NOTION DE COHÉRENCE TEMPORELLE

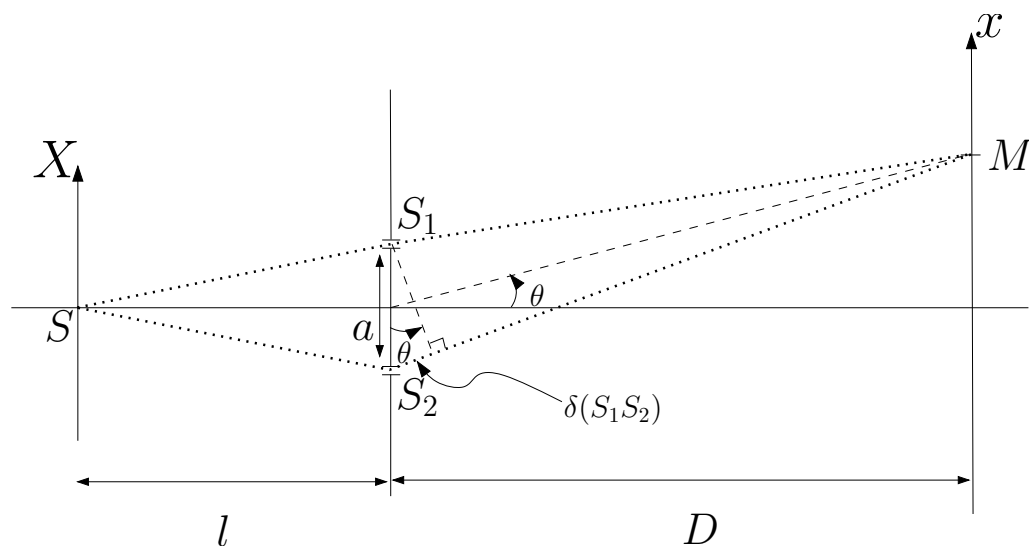


FIGURE 1.1 – Dispositif des trous d'Young

1. Les deux fentes S_1 et S_2 sont des sources secondaires, issues de la source S , et ont donc une relation de phase parfaitement déterminée. De plus, S_1 et S_2 sont à égale distance de S , donc le déphasage entre S_1 et S_2 est nul. On note s_i la vibration issue de la source S_i .

Rappel Approximations usuelles

- Approximation scalaire : on néglige le caractère vectoriel de l'onde lumineuse (cf. TP polarisation),
- Interférences à grande distance : $l, D \gg a, \lambda$.

Les deux fentes sont identiques, donc $s_1(S_1) = s_0 = s_2(S_2)$, avec $s_i(M) = s_0 e^{ik\delta_i(M)}$. On a introduit $\delta_i(m) = S_i M$. En M , les deux ondes se superposent selon

$$s(M) = s_1(M) + s_2(M) = s_0 (e^{ik\delta_1} + e^{ik\delta_2}) = s_0 e^{ik_0\delta_1} (1 + e^{ik_0(\delta_2 - \delta_1)}).$$

Première méthode $\delta_1 = S_1 M$, $\delta_2 = S_2 M$ et $k = 2\pi/\lambda$. On a

$$S_1 M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2},$$

$$S_2 M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + y^2}.$$

Ensuite, en faisant un développement limité au second ordre en x/D , y/D et a/D , on obtient

$$S_1 M - S_2 M = -\frac{a}{D} x.$$

L'intensité est donnée par $I = |s|^2$, d'où, en notant $I_0 = 2|s_0|^2$ l'intensité sur l'écran en l'absence d'interférence,

$$I = I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right) \right].$$

La figure d'interférence présente un interfrange $i = \lambda D/a$.

Deuxième méthode Avec O le point de l'axe optique situé entre S_1 et S_2 , on a

$$\delta_i^2 = \overline{S_i M}^2 = \left(\overline{S_i O} + \overline{OM}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + OM^2 + 2\overline{S_i O} \cdot \overline{OM}.$$

Puisque $OM \sim D \gg a$,

$$\delta_i \sim D \left(1 + \frac{\overline{S_i O} \cdot \overline{OM} + a^2/4 + x^2}{D^2} \right) \quad \text{et} \quad \delta_2 - \delta_1 = \frac{\overline{S_2 S_1} \cdot \overline{OM}}{D}.$$

La différence de marche entre les deux rayons parvenant au point M correspond donc au segment $\delta(S_1 S_2)$ sur la figure 1.1 :

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 = a \sin \theta \sim a \tan \theta = \frac{ax}{D}.$$

Pour avoir des interférences constructives, il faut avoir

$$\delta = p\lambda, p \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \underbrace{\frac{\lambda D}{a}}_{=i} p.$$

Remarque Cas de deux trous sources, interférences constructives pour

$$S_1M - S_2M = p\lambda, p \in \mathbb{Z}.$$

C'est l'équation d'*hyperboloïdes de révolution* de foyers S_1 et S_2 .

2. Si l'on a deux composantes spectrales de fréquences $\nu_1 = c/\lambda_1$ et $\nu_2 = c/\lambda_2 \neq \nu_1$, les ondes correspondant à ces deux composantes n'interfèrent pas entre elles. On dit qu'elles sont **incohérentes entre elles**. Dans ce cas, on additionne les figures d'interférence obtenues pour chaque longueur d'onde, et non pas les amplitudes.

DÉMONSTRATION :

Soit s la superposition en \vec{x} de deux vibrations de pulsation ω_1 et ω_2

$$s = s_0 \exp(-i\omega_1 t + i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}) + s'_0 \exp(-i\omega_2 t + i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}),$$

alors

$$I(\vec{x}) \propto |s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2\text{Re} \left(s_0 s'_0 \exp \left[-i(\omega_1 - \omega_2)t + i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} \right] \right).$$

Hypothèse simplificatrice sans perte de généralité : $s_0, s'_0 \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$|s|^2 = |s_0|^2 + |s'_0|^2 + 2s_0 s'_0 \underbrace{\cos \left((\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x} - (\omega_1 - \omega_2)t \right)}_{\text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \rightarrow \text{battements de période } 2\pi/(\omega_1 - \omega_2)}.$$

Le terme oscillant est nul en valeur moyenne quand $T_{\text{battements}}$, période temporelle des battements, et $T_{\text{détecteur}}$, temps de réponse du détecteur, vérifient

$$T_{\text{battements}} \ll T_{\text{détecteur}}.$$

Pour deux sources optiques distinctes, on a typiquement $T_{\text{battement}} \approx 10^{-15}$ s, *i.e.* un temps beaucoup plus court que les temps de réponse des détecteurs les plus rapides ($\approx 10^{-10}$ s). L'éclairement observé est donc simplement la somme des deux éclairements $|s_0|^2$ et $|s'_0|^2$. **Les deux vibrations lumineuses, de fréquences différentes, n'interfèrent pas entre elles.**

Donc, dans le cas de deux fréquences ν_1 et ν_2 ,

$$I = \frac{I_0}{2} \left(\underbrace{1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_1 \right) + 1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_2 \right)}_{2 \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \frac{\nu_2 - \nu_1}{2} \right)} \right).$$

On a ici supposé que la même intensité $I_0/2$ est contenue dans chaque composante spectrale. On pose $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ et $\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$, alors

$$I = I_0 \left(\underbrace{1 + \cos \left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta\nu \right)}_{\text{contraste } C} \underbrace{\cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \bar{\nu} \right)}_{\text{interférences à } \bar{\nu}} \right).$$

On retrouve donc la figure d'interférence pour une onde de fréquence $\bar{\nu}$, dont le contraste est modulé périodiquement par la fonction

$$C(x) = \cos \left(\pi \frac{ax}{cD} \Delta\nu \right).$$

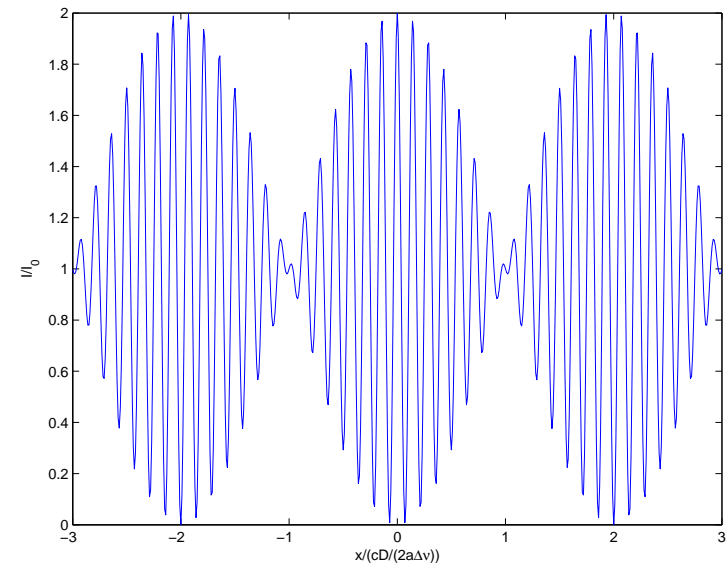


FIGURE 1.2 – Figure d'interférence observée pour deux composantes spectrales.

3. 3.1 On décompose la source en composantes spectrales élémentaires. L'intensité émise dans un intervalle de fréquence $\delta\nu$ autour de ν est donné par $I(\nu)\delta\nu$. Pour obtenir la figure d'interférence I , on somme donc les éclairements élémentaires,

i.e. les figures d'interférence, $dI(\nu)$ correspondant à chaque intervalle de fréquence $\nu \pm \delta\nu$:

$$dI(\nu) = I(\nu) \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu \right) \right] d\nu.$$

Les composantes spectrales élémentaires sont incohérentes entre elles, donc

$$I = \int dI = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) d\nu}_{=I_0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu \right) d\nu}_{\text{Re} \left(\int I(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu \right)}.$$

Or $I(\nu)$ ne prend des valeurs notables que pour $\nu \sim \nu_0$ à la largeur de raie près, supposée petite devant ν_0 , donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} I(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu, \\ &= e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I(\nu + \nu_0) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu \right). \end{aligned}$$

$\mathcal{J}(\nu) = I(\nu + \nu_0)/I_0$ est la densité spectrale normalisée **centrée en $\nu_0 = 0$** , qui ne contient donc plus d'information sur la fréquence centrale ν_0 , mais qui conserve l'information sur le profil de raie. On obtient alors

$$I = I_0 \left[1 + \text{Re} \left(\underbrace{e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu_0}}_{\text{interférences à } \nu_0} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu \right)}_{\text{contraste } C} \right) \right]. \quad (\text{I.1})$$

Pour un profil de raie symétrique autour de ν_0 , *i.e.* si $\mathcal{J}(\nu)$ est une fonction paire, l'intégrale dans l'équation précédente est réelle, et l'on obtient finalement

$$I = I_0 \left(1 + C(x) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_0 \right) \right),$$

où le contraste C s'écrit

$$C(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(\nu) e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu.$$

Le contraste de la figure d'interférence est donné par la **transformée de Fourier du profil de raie**.

3.2 *Cas d'une fonction porte* Le profil de raie s'écrit dans ce cas

$$I(\nu) = I_0 \frac{1}{\Gamma} \Pi(\nu; \nu_0, \Gamma),$$

où $\Pi(\nu; \nu_0; \Gamma)$ est non nulle, égale à 1, sur l'intervalle $[\nu_0 - \Gamma/2, \nu_0 + \Gamma/2]$ seulement.

On a alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} I(\nu) d\nu + \int_0^{+\infty} I(\nu) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu \right) d\nu, \\ &= I_0 + \frac{I_0}{\Gamma} \int_{\nu_0 - \frac{\Gamma}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Gamma}{2}} \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu \right) d\nu, \\ &= I_0 \left\{ 1 + \frac{1}{\Gamma} \frac{cD}{2\pi ax} \underbrace{\left[\sin \left(2\pi \frac{ax}{cD} \left(\nu_0 + \frac{\Gamma}{2} \right) \right) - \sin \left(2\pi \frac{ax}{cD} \left(\nu_0 - \frac{\Gamma}{2} \right) \right) \right]}_{2 \sin(\pi \frac{ax}{cD} \Gamma) \cos(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_0)} \right\}. \end{aligned}$$

Soit

$$I = I_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{cD} \nu_0 \right) \right].$$

On retrouve bien le fait que le contraste $C(x)$ est la transformé du profil de raie :

$$C(x) = \text{sinc} \left(\pi \frac{ax}{cD} \Gamma \right) = \int_{-\frac{\Gamma}{2}}^{\frac{\Gamma}{2}} \frac{1}{\Gamma} e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu.$$

3.3 *Cas d'une lorentzienne* On a cette fois

$$\mathcal{J}(\nu) = \frac{2\pi}{\Gamma} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\nu}{\Gamma} \right)^2},$$

et donc

$$C(x) = \frac{2\pi}{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\nu}{\Gamma} \right)^2} e^{2i\pi \frac{ax}{cD} \nu} d\nu$$

soit, d'après le formulaire,

$$C(x) = e^{-\pi \Gamma \frac{ax}{cD}}.$$

Le contraste est maintenant exponentiellement décroissant, comme il se doit : la transformée de Fourier d'une lorentzienne est une exponentielle décroissante.

Notion de cohérence temporelle, longueur de cohérence Dans les trois cas précédents, on voit que le contraste des interférences s'exprime simplement en fonction de la différence de marche $\delta = ax/D$ entre les deux rayons issus des deux trous d'Young :

$$C_{\text{deux raies}}(x) = \cos\left(\pi \frac{\delta}{c/\Gamma}\right)$$

$$C_{\text{porte}}(x) = \text{sinc}\left(\pi \frac{\delta}{c/\Gamma}\right)$$

$$C_{\text{lorentzienne}}(x) = \exp\left(-\pi \frac{|\delta|}{c/\Gamma}\right).$$

On voit ici apparaître naturellement la grandeur appelée *longueur de cohérence*

$$l_c = \frac{c}{\Gamma}.$$

Le contraste des interférences décroît quand la différence de marche entre les deux ondes émises par les deux trous d'Young devient grande par rapport à cette longueur.

On peut comprendre qualitativement pourquoi il y a brouillage des franges à grande différence de marche. En effet, la différence de phase entre les deux rayons, émis par les deux trous d'Young, dépend de λ selon $\delta\varphi = 2\pi\delta/\lambda$. Ainsi, si δ est faible, une faible variation de λ induit une faible variation de $\delta\varphi$ et la figure d'interférence n'est pour ainsi dire pas affectée par une largeur de raie non nulle. À grande différence de marche, au contraire, une variation faible de λ peut induire une forte variation de $\delta\varphi$ et une frange qui était brillante peut alors devenir sombre. Ce cas extrême se produit pour la première fois quand

$$\frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi\delta}{\lambda + \delta\lambda} + \pi \quad \text{soit} \quad \delta \sim \frac{\lambda^2}{\delta\lambda} = \frac{c}{\delta\nu}.$$

Pour une raie de largeur spectrale $\delta\nu = \Gamma$, il y a donc bien brouillage des franges d'interférence quand δ devient de l'ordre de l_c .

La longueur de cohérence est d'autant plus faible que la raie est large (relation de transformée de Fourier). En particulier, une source monochromatique ($\Gamma = 0$) a une longueur de cohérence infinie : il n'y a pas de brouillages des interférences. La

mesure de cette longueur de cohérence est donc une indication directe sur la largeur du profil de raie. Plus généralement, la mesure de la décroissance du contraste C avec δ permet de remonter à la forme du profil de raie.

En outre, on associe à l_c un temps caractéristique, appelé temps de cohérence, $\tau_c = \frac{l_c}{c} = \frac{1}{\Delta\nu}$, soit

$$\tau_c \Gamma = 1.$$

C'est le temps caractéristique sur lequel la source garde ses propriétés de cohérence. Dans le modèle des trains d'onde (voir exercice suivant), il correspond à la durée d'une impulsion lumineuse. Cela donne son nom à cette propriété de cohérence d'une source lumineuse, *i.e.* la *cohérence temporelle*.

Ordres de grandeurs

- *Lumière blanche* : $\Gamma \sim 10^{15} \text{ Hz}$ ($\delta\lambda \sim 400 \text{ nm}$), soit $l_c \sim 1 \mu\text{m}$ et $\tau_c \sim 10^{-15} \text{ s}$,
- *Lampe spectrale* : $\Gamma \sim 1 \text{ GHz}$ à 100 GHz (lampe basse ou haute pression) soit $l_c \sim \text{qq mm}$ à $\text{qq } 100 \text{ mm}$ et $\tau_c \sim 10^{-9} \text{ s}$ à 10^{-11} s ,
- *Laser* : les valeurs sont très variables, d'un type de laser à l'autre, mais $l_c \sim 1 \text{ m}$ à plusieurs km.

EXERCICE II MODÈLE DES TRAINS D'ONDE ET COHÉRENCE TEMPORELLE

1. On peut modéliser une source de lumière comme une assemblée d'atomes qui se désexcitent en émettant un train d'onde. Cela correspond au processus de désexcitation d'un niveau d'énergie E_1 vers un niveau E_0 , accompagné de l'émission d'une onde lumineuse de fréquence ν_0 tel que $h\nu_0 = E_1 - E_0$. En pratique, cette émission se fait avec une certaine largeur spectrale, liée notamment à la durée de vie finie des niveaux d'énergie. On considère donc des trains d'onde $U_0(t)$ de durée finie τ . Soit $\hat{U}_0(\nu)$ le spectre en fréquences d'un train d'onde.

$$\begin{aligned} \hat{U}_0(\nu) &= \text{TF}(U_0(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(t) e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{2i\pi(\nu_0 - \nu)t} dt, \\ &= \frac{1}{2i\pi(\nu_0 - \nu)} 2i \sin\left(2\pi(\nu_0 - \nu) \frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\hat{U}_0(\nu) = \tau \operatorname{sinc}(\pi(\nu_0 - \nu)\tau).$$

Ce modèle simple permet donc qualitativement de reproduire une largeur de raie, ici une raie en forme de sinus cardinal. La première annulation du sinus cardinal a lieu en $\nu_0 \pm \delta\nu/2$, avec $\delta\nu = 2/\tau$, largeur du spectre d'un train d'onde.

2. La source émet une succession de N trains d'onde $U_k(t)$, tous identiques, mais de phases relatives aléatoires, *i.e.* une onde

$$U(t) = \sum_k U_k(t), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_k(t) = e^{i\varphi_k} e^{2i\pi\nu_0 t}, & |t - t_k| < \tau/2, \\ U_k(t) = 0, & |t - t_k| > \tau/2, \end{cases}$$

où $t_k = k\tau$, $i \in \mathbb{Z}$ et où φ_k est une phase aléatoire. Sans perte de généralité, on suppose $\varphi_0 = 0$. Le spectre de cet ensemble de trains d'onde est alors

$$\begin{aligned} \hat{U}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_k U_k(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \sum_k e^{i\varphi_k} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t - t_k) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k} \int_{-\infty}^{+\infty} U_0(t) e^{-2i\pi\nu t} dt, \\ &= \hat{U}_0(\nu) \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k}. \end{aligned}$$

On a finalement

$$I(\nu) = |\hat{U}(\nu)|^2 = \underbrace{\left| \sum_k e^{i\varphi_k} e^{-2i\pi\nu t_k} \right|^2}_{=N \text{ car } \varphi_k \text{ est aléatoire}} |\hat{U}_0(\nu)|^2,$$

soit

$$I(\nu) = I_0 \operatorname{sinc}^2(\pi(\nu - \nu_0)\tau).$$

Le spectre de l'assemblée de trains d'onde est le même que celui d'un train d'onde unique.

3. On trouve une raie avec un largeur $\delta\nu$ telle que

$$\delta\nu \cdot \tau \sim 1.$$

Le temps de cohérence, tel qu'on l'avait introduit à l'exercice précédent, est donc ici τ , et l'expression *temps de cohérence* prend tout son sens : c'est la durée sur laquelle

l'onde émise garde sa cohérence. Tous les temps τ , la phase du train d'onde change de façon aléatoire et l'information de phase, *i.e.* la cohérence, est perdue.

De même, la longueur de cohérence $l_c = c\tau$ correspond ici simplement à l'extension spatiale d'un train d'ondes. Dans un interféromètre, si la différence de marche δ entre deux chemins est inférieure à l_c , alors on assiste à l'interférence entre deux ondes issues du même train d'onde initial, qui interfèrent donc avec une relation de phase parfaitement déterminée. Si $\delta > l_c$ en revanche, alors les deux ondes sont issues de deux trains d'onde différents, sans relation de phase bien déterminée. La phase de la figure d'interférence est alors aléatoire, et on a un brouillage.

4. On a $\delta\nu = 1/\tau$, $\nu = c/\lambda$ donc $\delta\lambda = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu$.

- Lumière blanche : $\delta\lambda \sim 400 \text{ nm}$, $\tau \sim 10^{-15} \text{ s}$ et donc $l_c \sim 1 \mu\text{m}$.
- Raie spectrale : $\delta\lambda \sim 0,03 \text{ nm}$, $\tau \sim 10^{-11} \text{ s}$ et donc $l_c \sim 10 \text{ mm}$.
- Laser : $\delta\lambda$ est très variable suivant le laser, on retiendra que l_c est supérieur en général à plusieurs mètres.

EXERCICE III NOTION DE COHÉRENCE SPATIALE

1. On note $\delta_P(M_1, M_2)$ la différence de marche entre les chemins PM_1 et PM_2 . Considérons un point P de côte X, appartenant à la fente source. La différence de marche entre les vibrations lumineuses issues de P en S_1 et S_2 s'écrit

$$\delta_P(S_2, S_1) = PS_2 - PS_1 \approx a \frac{X}{l},$$

De même, la différence de marche entre les vibrations lumineuses issues de S_1 et S_2 au point M s'écrit

$$\delta_M(S_2, S_1) \approx a \frac{x}{D}.$$

Finalement, on obtient en M l'addition de deux ondes (l'une passant par S_1 et l'autre par S_2) déphasées de

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\delta_P(S_2, S_1) + \delta_M(S_2, S_1)) = \frac{2\pi}{\lambda} a \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right).$$

La vibration lumineuse ds au point M s'écrit donc

$$ds(x) = ds_0 + ds_0 e^{i\delta\varphi},$$

avec une intensité $dI(x) = |ds|^2$ égale à, en notant $dI_0 = |ds_0|^2$,

$$dI(x) = dI_0 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{X}{l} + \frac{x}{D} \right) \right] \right\}.$$

On remarque en particulier que déplacer le point source P d'une distance X revient à déplacer la figure d'interférence sur l'écran d'une longueur $-X \frac{D}{l}$.

Soit $I(X)$ la densité spatiale d'intensité de la source. La source est une fente homogène, on a donc

$$I(X) = \frac{I_0}{b} \Pi(X; b),$$

où $\Pi(X, b)$ est la fonction porte centrée en 0, de largeur b . Un élément de longueur dX centré en X émet alors une intensité $dI_0(X) = I(X) dX$.

La source étant spatialement incohérente, l'éclairement total est obtenu en sommant les contributions en intensité $dI(x)$ de chaque élément de la fente selon

$$I(x) = \frac{I_0}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{X}{l} \right) \right] \right) dX, \quad (\text{III.1})$$

qui se calcule de façon élémentaire pour donner

$$I(x) = I_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\pi \frac{ab}{\lambda l} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda D} \right) \right].$$

Notion de cône de cohérence Le contraste des franges d'interférence est ici donné par

$$C = \text{sinc} \left(\pi \frac{ab}{\lambda l} \right).$$

En particulier, on voit que **le contraste ne dépend pas de la position de l'écran d'observation, mais uniquement de la distance entre la fente source et la bifente**. Il caractérise donc la cohérence de la source elle-même.

La première annulation du contraste a lieu pour une fente source de largeur

$$b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

On peut interpréter cela en considérant deux sources ponctuelles S et S' situées dans le plan de la fente source. Il y a brouillage des interférences quand les deux sources sont

telles que leurs figures d'interférence sont décalées de $\frac{i}{2}$, où $i = \lambda D/a$ est l'interfrange. On obtient alors sur l'écran un éclairement uniforme. Puisque déplacer la source de X déplace la figure d'interférence sur l'écran de $-XD/l$, ce brouillage a lieu quand S et S' sont distantes de $b_0/2$, avec

$$\frac{b_0 D}{2 l} = \frac{i}{2} = \frac{\lambda D}{2a} \quad \text{soit} \quad b_0 = \frac{\lambda l}{a}.$$

La largeur b_0 de la fente source est alors la largeur la plus petite pour laquelle, pour tout point de la source, il y a un autre point distant de $b_0/2$, auquel cas, il y a brouillage total.

Étant donné maintenant une fente source de largeur b , comment faut-il choisir la bifente pour observer une figure d'interférence, *i.e.* pour que les deux sources secondaires soient cohérentes ? Il faut remarquer que le contraste C ne dépend de a et l que via le rapport a/l , *i.e.* l'angle α sous lequel est vue la bifente depuis la fente source. Les franges sur l'écran seront alors bien contrastées tant que

$$\alpha \leq \theta_c = \frac{\lambda}{b}. \quad (\text{III.2})$$

On voit ici apparaître l'angle caractéristique θ_c , et avec lui la notion de **cône de cohérence**. Tant que la bifente est située à l'intérieur du cône d'angle θ_c partant de la fente source, les deux sources secondaires sont cohérentes et la figure d'interférence bien contrastées. Ce cône correspond donc à une zone de rayonnement cohérent, d'où l'appellation *cône de cohérence*. Si les deux fentes sortent de ce cône de cohérence en revanche, les deux sources secondaires ne peuvent plus être considérées comme cohérentes entre elles et on ne voit plus de figure d'interférence sur l'écran.

Comme la longueur ou le temps de cohérence étaient d'autant plus petits que la largeur spectrale de la source était grande, le cône de cohérence est d'autant plus étroit que la fente source est large.

On comprend alors pourquoi les étoiles peuvent, malgré leurs grandes tailles, être considérées comme des sources ponctuelles cohérentes spatialement : nous sommes tellement loin d'elles que la Terre est entièrement contenue dans leurs cônes de cohérence (ex : mesure interférométrique de la distance angulaire d'une étoile double).

Remarque L'équation (III.2) pourrait se récrire $\beta \leq \lambda/a$, où $\beta = b/l$ est l'angle sous lequel est vue la source depuis la bi-fente. La même notion de cône de cohérence, mais vu depuis la bi-fente cette fois, peut donc être utilisée : la source doit être contenue dans ce cône pour pouvoir la considérer comme une source cohérente.

2. Avec un laser, chaque point de la source est en relation de phase *stable* avec les autres (un seul mode du champ électromagnétique), le raisonnement précédent n'est plus valable : un faisceau laser est cohérent spatialement.
3. On reprend simplement le résultat équation (III.1), en conservant une densité spatiale d'intensité $I(X)$ a priori quelconque. On a alors

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X) \left(1 + \cos \left[\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{x}{D} + \frac{X}{l} \right) \right] \right) dX.$$

On note, comme précédemment, $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I(X) dX$ et $\mathcal{J}(X) = I(X)/I_0$, la densité spatiale d'intensité normalisée. On peut alors écrire, de façon similaire au résultat de l'équation (I.1),

$$I(X) = I_0 \left[1 + \operatorname{Re} \left(\underbrace{e^{2i\pi \frac{ax}{\lambda D}}}_{\text{Interférences}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(X) e^{2i\pi \frac{aX}{\lambda l}} dX \right)}_{\text{Contraste } C} \right) \right]. \quad (\text{III.3})$$

Pour un profil de raie symétrique autour de $X = 0$, *i.e.* si $\mathcal{J}(X)$ est une fonction paire, l'intégrale dans l'équation précédente est réelle, et l'on obtient finalement, en notant $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$ le nombre d'onde,

$$I = I_0 \left[1 + C \left(\frac{a}{l} \right) \cos \left(2\pi \frac{ax}{D} \bar{\nu} \right) \right],$$

où le contraste C s'écrit

$$C \left(\frac{a}{l} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}(X) e^{2i\pi \frac{aX}{\lambda l} \bar{\nu}} dX.$$

Le contraste de la figure d'interférence est donc donné par la **transformée de Fourier du profil spatial de la source**. Ce résultat constitue le théorème de VAN CITTERT – ZERNIKE. Il établit que le degré de cohérence spatial entre les deux points S_1 et S_2 et relié à la transformée de Fourier de la densité spatiale d'intensité.

Remarque 1 : On peut retrouver formellement la notion d'angle de cohérence *via* le théorème de Van Cittert – Zernike. L'angle θ_c correspond en fait à une largeur «spectrale» de la source, en considérant ici des fréquences spatiales.

Remarque 2 : Le théorème de Van Cittert – Zernike est en réalité plus complexe et plus puissant que la forme présentée ici, quantifiant le degré de cohérence entre deux points quelconques d'un système de sources secondaires. Néanmoins, cette forme est la plus courante et permet de nombreuses applications (mesure de la taille d'une étoile par exemple).

EXERCICE IV INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON (IMPORTANT)

- 1.1 Dans le cas d'une source ponctuelle, les deux lames font office de miroir. On obtient alors deux sources images S_1 et S_2 , ponctuelles, séparées de $2h$, cohérentes entre elles. Il s'agit donc d'un système équivalent à deux trous d'Young. La figure d'interférence est donc connue : on retrouve les hyperboloïdes d'interférence obtenus à l'Exercice I. Contrairement au cas précédent, toutefois, l'écran est placé dans un plan perpendiculaire à la bifente. Au point M considéré sur la figure, on observe maintenant des anneaux, de rayons d'autant plus grands que l'écran est éloigné de la lame, et centrés sur l'axe de la bifente.
- 1.2 *Cas d'une source étendue* Si l'on ouvre maintenant la source, par exemple dans un plan parallèle à l'écran, la source étant incohérente spatialement, on additionne les figures d'interférence générées par chaque point de la source. On observe donc la somme d'anneaux d'interférence dont le centre est à une position sur l'écran qui dépend du point source considéré. A priori, il y a donc brouillage des interférences : les anneaux ne se superposent pas.

Il existe toutefois **une** position de l'écran pour laquelle il n'y a pas de brouillage : l'infini. Dans ce cas, en effet, seule l'inclinaison des rayons lumineux importe ; un déplacement spatial de la source parallèlement à l'écran ne modifie pas la figure observée. Les anneaux d'interférence correspondant aux différents points de la fente source sont alors tous centrés au même point de l'écran, les anneaux se superposent et il n'y a plus de brouillage.

Parce qu'il existe une position particulière de l'écran pour laquelle le contraste des interférences dépend de façon minimale de la taille de la source (ici, il n'en dépend même plus du tout), on dit que les interférences sont **localisées** en ce point, en l'occurrence à l'infini.

- 1.3 On considère une lame d'épaisseur e , d'indice n (FIG. 4.1). La différence de marche

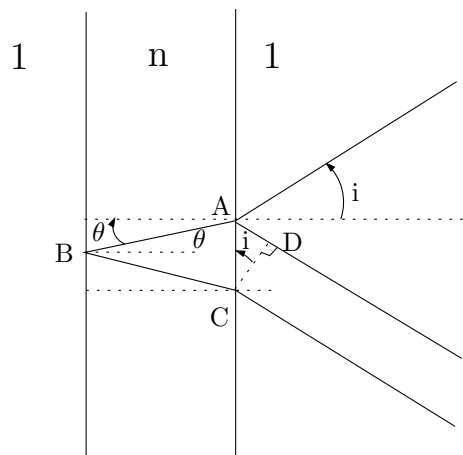


FIGURE 4.1 – Différence de marche introduite par une lame d'épaisseur e .

s'écrit

$$\delta = n(AB + BC) - AD = 2nAB - AD.$$

D'après les lois de Descartes, $\sin i = n \sin \theta$, d'où

$$AD = AC \sin i = AC n \sin \theta.$$

Or

$$AC = 2AB \sin \theta \quad \text{et} \quad AB = \frac{e}{\cos \theta}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2en}{\cos \theta} - 2n \sin^2 \theta \left(\frac{e}{\cos \theta} \right), \\ &= \frac{2en}{\cos \theta} (1 - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\boxed{\delta = 2ne \cos \theta}.$$

Dans le cas de l'air, $n = 1$ (et $\theta = i$) donc $\delta = 2ne \cos \theta$.

2. En considérant le miroir M_1 et le miroir M'_2 image de M_2 par rapport à S , l'interféromètre de Michelson est l'exact équivalent de la lame d'air étudiée à la question précédente.

- 2.1 a. On reprend alors les résultats précédents : la différence de marche entre deux rayons d'angle d'incidence θ sur les miroirs s'écrit $\delta = 2e \cos \theta$, où $e = M_2 M_1$.
- b. Comme pour la lame d'air, les franges d'interférences sont localisées à l'infini. Pour les observer, on place en sortie de l'interféromètre une lentille de focale f . L'écran d'observation est placé dans le plan focal image de la lentille. Un rayon d'incidence θ sur les miroirs arrive alors sur l'écran à une distance $r(\theta) = f \tan \theta \sim f\theta$ du centre de l'écran.
- c. En un point M de l'écran, situé à une distance r du centre de la figure, la différence de marche $\delta(r)$ entre les deux rayons incidents ne dépend que de $\theta = r/f$, i.e. l'inclinaison de ces faisceaux sur l'axe (au niveau de l'interféromètre). La figure d'interférence observée est donc bien une figure en anneaux. On dit qu'on observe des **anneaux d'égale inclinaison**.
Pour observer l'ensemble de la figure d'interférence, ou encore pour observer plusieurs anneaux, il faut donc que de nombreuses inclinaisons soient mises en jeu. On veillera donc à éclairer l'interféromètre avec un faisceau bien divergent.
- d. *Rayon des anneaux brillants* Un anneau de rayon r correspond à une frange brillante si la différence de marche $\delta(r)$ peut s'écrire $\delta(r) = p\lambda_0$, où $p \in \mathbb{Z}$. En utilisant l'expression de δ trouvée précédemment, on obtient

$$\cos \theta(r) = \frac{p\lambda_0}{2e}. \quad (\text{IV.1})$$

On suppose que le centre de la figure est brillant. Cela signifie que

$$\cos(\theta = 0) = 1 = \frac{p_0\lambda_0}{2e}, \quad p_0 \in \mathbb{Z};$$

l'intervalle e est un multiple de λ_0 .

On note alors $k = p_0 - p$. L'anneau d'ordre p est le $k^{\text{ième}}$ anneau de la figure d'interférence. On note $r_k = f\theta_k$ son rayon. En se plaçant dans l'approximation de Gauss, i.e. à la limite des petits angles, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ et

$$1 - \frac{\theta_k^2}{2} = \frac{p\lambda_0}{2e} = \frac{(p_0 - k)\lambda_0}{2e}.$$

D'où

$$\boxed{\theta_k = \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}},$$

et

$$r_k = f \sqrt{k \frac{\lambda_0}{e}}$$

Attention ! Ces relations sont trompeuses : elle donnent la valeur du rayon du $k^{\text{ième}}$ anneau sur l'écran quand le centre est brillant. Elles ne permettent donc pas de suivre l'évolution du rayon d'un anneau donné quand on varie e . Par exemple, elles permettent de comparer le rayon du premier anneau brillant quand $e = e_1 = p_0 \lambda_0$ et du premier anneau brillant quand $e = e_2 = (p_0 + 1) \lambda_0$. Si l'on passe continûment de e_1 à e_2 , le premier anneau brillant quand $e = e_1$ devient... le *deuxième* anneau brillant, quand $e = e_2$ (en supposant $p_0 > 0$). Il faudrait donc comparer $r_{k=1}(e_1)$ à $r_{k=2}(e_2)$ pour déterminer comment le rayon des anneaux varie quand on modifie e .

En pratique, il faut toujours revenir à la relation $\cos i = \frac{p \lambda_0}{2e}$.

- e. Si $e = 0$, alors pour toute inclinaison θ , ou encore pour tout point r sur l'écran, $\delta(r) = 0$: les interférences sont constructives. L'éclairement est uniforme, on dit qu'on obtient une **teinte plate**. Ce point particulier, qui correspond au point où M'_2 et M_1 sont confondus, *i.e.* que M_1 et M_2 sont symétriques l'un de l'autre par rapport à S , ou encore que les deux bras du Michelson ont la même longueur est appelé **contact optique**.

En pratique, on cherche toujours le contact optique quand on règle le Michelson. Cela permet de lire directement sur le vernier la différence de longueur entre les deux bras du Michelson.

Imaginons maintenant que l'on augmente $|e|$, à partir de n'importe quel point. Dans ce cas, d'après l'équation (IV.1), $\cos \theta$ diminue, donc θ et r augmentent : les anneaux semblent sortir du centre de la figure.

On retient donc que si $|e|$ augmente, *i.e.* si l'on s'éloigne du contact optique, les anneaux semblent sortir, alors qu'ils rentrent si l'on se rapproche du contact optique.

- f. L'interféromètre de Michelson, comme l'interféromètre à trous d'Young, est un interféromètre à deux ondes. Contrairement au dispositif à trous d'Young toutefois, il est possible, avec un interféromètre de Michelson d'utiliser des sources étendues sans perte de contraste, et donc d'avoir des figures d'interférence beaucoup plus lumineuses.

2.2 a. Les diverses composantes spectrales sont incohérentes entre elles. On aura donc la superposition des plusieurs systèmes d'anneaux, associés à chaque longueur d'onde, dont le rayon dépend de λ . On observe donc des anneaux de couleurs différentes, voire un brouillage des interférences.

- b. On suppose maintenant que la source n'émet qu'à deux longueurs d'onde, notées λ_1 et λ_2 . On additionne alors les figures d'interférences obtenue pour chaque longueur d'onde. Au centre de l'écran, la différence de marche s'écrit $\delta = 2e$. L'intensité au centre de l'écran s'écrit donc

$$\begin{aligned} I(e) &= \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right] + \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right] \\ &= I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_1} \right) + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_2} \right) \right] \\ &= I_0 \left[1 + \cos \left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left(2\pi e \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

En introduisant $\bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1}}{2} \right)^{-1}$, on a alors

$$I(e) = 2I_0 \left[\underbrace{1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\bar{\lambda}} \right)}_{\text{interférences}} \underbrace{\cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda_1 \lambda_2} \Delta\lambda \right)}_{\text{contraste}} \right]. \quad (\text{IV.2})$$

Remarque L'équation (IV.2) prend une forme plus simple en utilisant la fréquence moyenne $\bar{\nu} = (\nu_1 + \nu_2)/2$ et l'écart en fréquence $\Delta\nu$ du doublet :

$$I(e) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{c} \bar{\nu} \right) \cos \left(\frac{2\pi e}{c} \Delta\nu \right) \right].$$

En pratique, on a $\Delta\lambda \ll \lambda_1, \lambda_2$, et l'on peut récrire l'équation (IV.2) sous la forme

$$I(e) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_1} \right) \cos \left(\frac{2\pi e}{\lambda_1^2} \Delta\lambda \right) \right]. \quad (\text{IV.3})$$

- c. En variant e , on observe la variation d'éclairement tracée FIG. 4.2, figure dite de *battements* entre les deux longueurs d'onde. On peut mesurer la longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda} \approx \lambda_1, \lambda_2$ en mesurant la période rapide des battements et $\Delta\lambda$ en mesurant leur période lente (*Cf.* TP Spectrométrie).

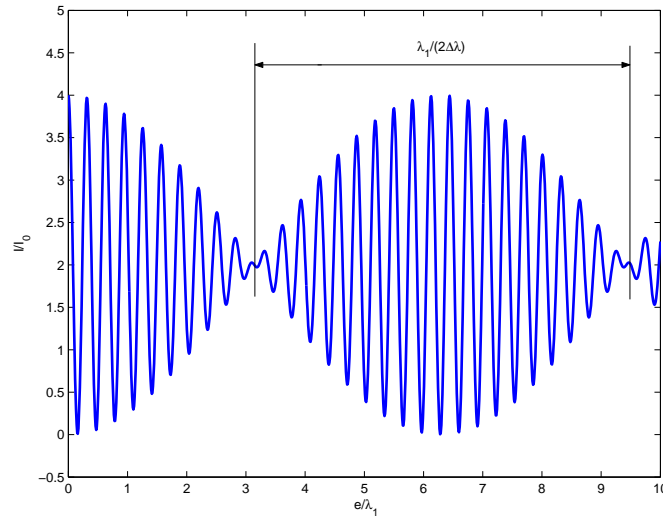


FIGURE 4.2 – Allure de l'interférogramme dans le cas du doublet du Sodium.

On a ici annulation du contraste pour

$$\frac{2\pi e \Delta \lambda}{\lambda_1^2} = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Entre deux annulations, on a charioté de Δe tel que

$$\frac{2\pi \Delta e \Delta \lambda}{\lambda_1^2} = \pi, \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta \lambda = \frac{\lambda_1^2}{2\Delta e}}.$$

Les oscillations rapides de période δe sont telles que $\frac{4\pi \delta e}{\lambda_1} = 2\pi$ soit

$$\boxed{\lambda_1 = 2\delta e}.$$

Applications numériques Pour le doublet du mercure, $\delta e = 289,0 \text{ nm}$ et $\Delta e = 151,8 \text{ }\mu\text{m}$. Pour le doublet du sodium, $\delta e = 294,5 \text{ nm}$ et $\Delta e = 588,6 \text{ }\mu\text{m}$.

- Si on introduit un angle α entre les deux miroirs, on dit qu'on obtient un **coin d'air**, plutôt qu'une lame d'air. La différence de marche entre deux rayons, issus d'un même

faisceau en entrée de l'interféromètre, est proportionnelle à l'épaisseur du coin d'air à l'endroit où les rayons interceptent les miroirs. Quand on se déplace le long du coin d'air, l'épaisseur du coin d'air $e(x)$, et donc la différence de marche δ , varie linéairement avec la distance x au sommet du coin d'air. Pour des rayons en incidence normale, on a simplement $\delta = 2e(x) = 2\alpha x$. Si l'on fait l'image du coin d'air sur un écran, on observe alors des franges rectilignes (les franges brillantes correspondent à $\delta = p\lambda$, où $p \in \mathbb{Z}$, soit $x = p\lambda/2$), appelées **franges d'égal épaisseur**.

Pour des angles d'incidence non nuls, la différence de marche au même point x est plus petite que $2e$. Si on éclaire le coin d'air avec un faisceau non collimaté, on superpose alors des figures d'interférence d'interfranges différents, réduisant alors le contraste. On éclaire donc toujours un coin d'air avec un faisceau parallèle ! Dans ce cas, en ouvrant la source, on augmente la zone éclairée du coin d'air sans pour autant brouiller les franges d'interférence : le contraste des franges ne dépend (quasiment) pas de la largeur de la source quand on les observe au niveau du coin d'air, et au niveau du coin d'air seulement : les interférences sont **localisées sur le coin d'air**.

Remarque Contrairement à ce qu'on avait obtenu pour la lame d'air du Michelson, le contraste dépend en fait encore de la largeur de la source, mais au deuxième ordre seulement. Cet effet peut être mis en évidence expérimentalement, cf Sextant p.164.

Au centre de la figure, la différence de marche est nulle quelle que soit la longueur d'onde : $\delta = 2e = 0$. On observe alors une frange sombre sur l'écran, et non brillante, à cause du déphasage supplémentaire de π entre les deux bras du Michelson¹, induit par la séparatrice \mathcal{S} . En s'éloignant du centre, en revanche, la différence de marche dépend de la longueur d'onde et l'on observe alors, en éclairant le Michelson avec de la lumière blanche, des irisations, correspondant à la superposition de franges dont l'interfrange dépend de la longueur d'onde. Plus on s'éloigne du centre, plus le déphasage $2\pi\delta/\lambda$ et donc plus l'éclairement varie rapidement avec λ . Loin du centre, on ne distingue alors plus les irisations, mais une teinte blanche appelée **blanc d'ordre supérieur** : en un point de l'écran, le spectre de l'éclairement n'est pas plat, mais *canalé* (il n'y a par exemple pas de contribution des longueurs d'onde λ pour lesquelles, en ce point, $\delta = p\lambda$).

1. C'est en fait encore un peu plus compliqué que ça, cf. Sextant p.233, note 32

EXERCICE V INTERFÉROMÈTRE DE FABRY-PÉROT (IMPORTANT)

1. 1.1 Pour calculer la figure d'interférence observée en sortie du Fabry-Pérot, il faut considérer a priori tous les faisceaux en sortie de l'interféromètre, et non plus seulement 2 comme on l'avait fait dans le cas de la lame d'air. Le coefficient de réflexion des miroirs étant très proche de l'unité, tous ces faisceaux ont des intensités similaires (du moins pour les premiers), et on ne peut donc pas, a priori, négliger la contribution de l'un par rapport à l'autre à la figure d'interférence. On parle d'interférences à ondes multiples.

Il faut donc calculer l'amplitude et la phase de chacun des faisceaux en sortie de l'interféromètre. Il faut pour cela calculer la différence de marche correspondant au chemin séparant les deux miroirs. Par un calcul identique à celui de l'exercice précédent, on trouve

$$\delta_0 = e \cos i,$$

où i est l'angle d'incidence des rayons sur les miroirs. On note, pour la suite, $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(2\delta_0) = \frac{4\pi e}{\lambda} \cos i$, le déphasage accumulé par l'onde lors d'un aller-retour entre les parois du Fabry-Pérot.

On note \tilde{s}_0 l'amplitude complexe de l'onde à l'entrée du Fabry-Pérot. L'amplitude du premier rayon transmis, qui a donc été transmis par deux miroirs (coefficient t^2) et a accumulé un déphasage $\varphi/2$ s'écrit

$$s_0 = t e^{i\frac{\varphi}{2}} t \times \tilde{s}_0.$$

Le rayon émergent suivant a subi deux réflexions supplémentaires sur les miroirs (coefficient r^2) et accumulé un déphasage supplémentaire égale à $2 \times \varphi/2$, soit

$$s_1 = t e^{i\frac{\varphi}{2}} r e^{i\frac{\varphi}{2}} r e^{i\frac{\varphi}{2}} t \times \tilde{s}_0 = s_0 r^2 e^{i\varphi}.$$

On étend facilement au calcul des ondes émergentes suivantes. L'amplitude du $n^{\text{ième}}$ rayon s'écrit

$$s_n = s_0 (r^2 e^{i\varphi})^n.$$

La vibration lumineuse en sortie de l'interféromètre est alors la somme des vibrations lumineuses s_n issues de toutes les réflexions :

$$s = \sum_{n \geq 0} s_n = s_0 \sum_{n \geq 0} (r^2 e^{i\varphi})^n = \tilde{s}_0 \frac{t^2 e^{i\varphi/2}}{1 - r^2 e^{i\varphi}}.$$

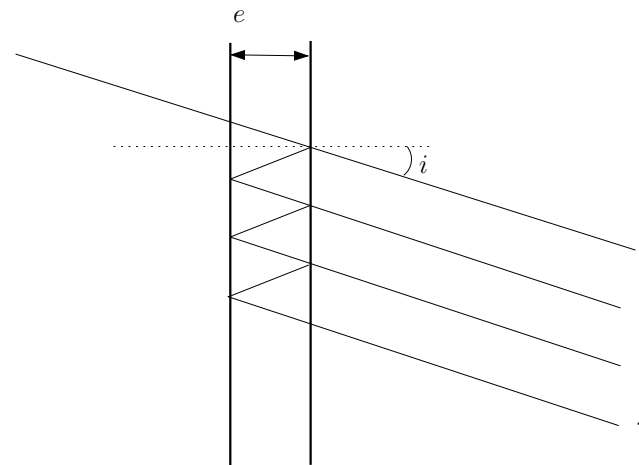


FIGURE 5.1 – Interférences à ondes multiples dans le cas d'un Fabry-Pérot.

Le déphasage φ ne dépend que de l'inclinaison des faisceaux, comme pour la lame d'air (du Michelson). De façon similaire, les interférences sont alors localisées à l'infini, et la figure d'interférence présente des anneaux d'égale inclinaison. L'intensité sur un écran placé à l'infini s'écrit

$$I(i) = |s(i)|^2 = I_0 \frac{T^2}{|1 - r^2 e^{i\varphi}|^2},$$

$$= I_0 \frac{T^2}{(1 - r^2 e^{i\varphi})(1 - r^{*2} e^{-i\varphi})}.$$

À une redéfinition de φ près, on peut supposer r réel, et l'on a

$$\frac{I}{I_0} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi},$$

$$= \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 2R(1 - \cos \varphi)},$$

$$= \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Or, dans un bon interféromètre, l'absorption est négligeable, *i.e.* $T + R = 1$, soit

finalemt

$$I = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

On a un maximum d'intensité quand $\frac{\varphi}{2} = m\pi \Leftrightarrow \varphi = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Le maximum vaut alors

$$I_{\max} = I_0.$$

L'écart entre deux maxima d'intensité, ou résonances, est simplement $\Delta\varphi = 2\pi$.

On a un minimum d'intensité quand $\frac{\varphi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi = (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z}$. Le minimum vaut alors

$$I_{\min} = \frac{I_0}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}}$$

1.2 On cherche maintenant à calculer la largeur à mi-hauteur $\delta\varphi$ d'un pic de résonance. Par définition, on a

$$I\left(\frac{\delta\varphi}{2}\right) = \frac{I_0}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{\delta\varphi}{4} = 2,$$

soit

$$\sin^2 \frac{\delta\varphi}{2} = \frac{(1-R)^2}{4R}.$$

Pour des pics suffisamment fins, $\delta\varphi \ll 2\pi$, et l'on trouve

$$\sin^2 \frac{\delta\varphi}{2} \approx \frac{\delta\varphi^2}{4} \frac{(1-R)^2}{4R},$$

d'où finalement

$$\delta\varphi = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}},$$

qui est bien petit devant 2π .

La finesse \mathcal{F} du Fabry-Pérot s'écrit alors

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}.$$

C'est une fonction croissante de R qui quantifie la *finesse* des pics de résonance : plus la finesse de l'interféromètre est élevée, plus les pics sont fins et donc meilleure est la résolution.

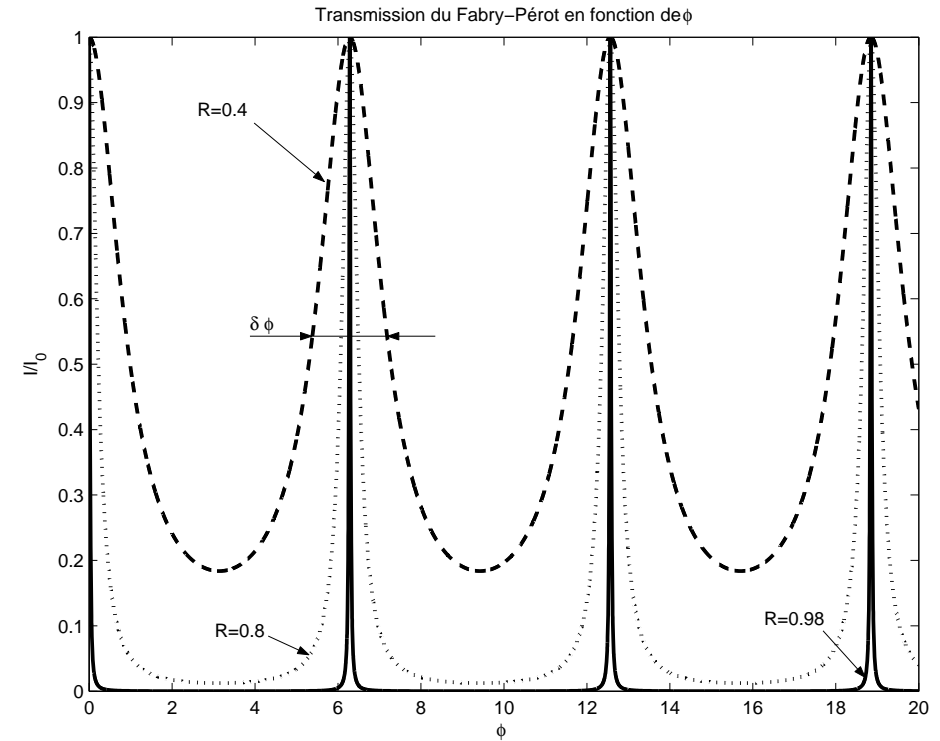


FIGURE 5.2 – Transmission d'un Fabry-Pérot en fonction de φ . Influence du coefficient de réflexion.

Remarque Pour un interféromètre à 2 ondes, comme le Michelson en lame d'air, la figure d'interférence est une sinusoïde pour laquelle on trouverait une finesse $\mathcal{F} = \Delta\varphi/\delta\varphi = 2\pi/\pi = 2$. En fait, un interféromètre de finesse \mathcal{F} est l'équivalent d'un interféromètre à \mathcal{F} ondes. Un Fabry-Pérot de finesse \mathcal{F} est ainsi aussi performant qu'un réseau à $N = \mathcal{F}$ fentes.

1.3 Si le centre des anneaux est brillant, alors

$$\varphi(i=0) = \frac{4\pi e \cos i}{\lambda} = \frac{4\pi e}{\lambda} = 2p_0\pi, p_0 \in \mathbb{Z}.$$

Soit p l'ordre d'interférence d'un anneau brillant, correspondant à l'angle d'inci-

dence i_p :

$$\cos i_p = \frac{\lambda}{2e} p.$$

Un ordre d'interférence p plus élevé correspond à un $\cos i_p$ plus élevé et donc à i_p plus faible. Le $k^{\text{ième}}$ anneau correspond donc à l'ordre $p_0 - k$:

$$\cos i_{k=p_0-p} = \frac{\lambda}{2e} (p_0 - k).$$

Pour des faibles angles d'inclinaison, $\cos i_k \approx 1 - i_k^2/2$ et

$$i_k = \sqrt{\frac{\lambda k}{e}}.$$

2. 2.1 On observe l'anneau d'incidence i . Si l'on suppose qu'on a une frange brillante pour une fréquence ν_0 donnée, on aura une nouvelle frange brillante pour $\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi(\nu_1) - \varphi(\nu_0) &= \frac{4\pi e \cos i}{c} \Delta\nu = 2\pi \\ \text{soit } \Delta\nu &= \frac{c}{2e \cos i}. \end{aligned}$$

L'intervalle spectral libre (ISL) du Fabry-Pérot s'écrit donc

$$\Delta\nu_{\text{ISL}} = \frac{c}{2e'},$$

où $e' = e \cos i$ est la largeur effective de l'interféromètre. Au centre des anneaux, en particulier, $e' = e$.

La largeur spectrale $\delta\nu$ d'un pic de résonance est l'intervalle de fréquence correspondant à une variation $\delta\varphi$ de la phase φ définie plus haut. Puisque $\varphi = \frac{4\pi e'}{c} \nu$, on a simplement

$$2\pi\delta\nu = \frac{c}{2e'} \delta\varphi = \Delta\nu_{\text{ISL}} \left(\frac{\Delta\varphi}{\mathcal{F}} \right) = 2\pi \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}.$$

La finesse \mathcal{F} de l'interféromètre peut donc finalement s'écrire sous la forme

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\delta\nu},$$

i.e. le rapport entre l'intervalle spectral libre et la plus petite variation de fréquence mesurable avec l'interféromètre. Cette relation est valable quel que soit l'anneau considéré : la finesse de l'interféromètre est une grandeur intrinsèque qui ne dépend pas des conditions d'utilisation, ici par exemple de l'angle d'inclinaison observé.

2.2 Toujours pour une inclinaison i donnée, on cherche à déterminer la variation minimale $\delta\lambda$ de longueur d'onde que l'on pourra détecter autour d'une longueur d'onde λ donnée, supposée telle que l'anneau est brillant pour λ (c'est là qu'on a le maximum de sensibilité). Comme précédemment, on a donc

$$\lambda = \frac{2e'}{p} = \frac{c}{p\Delta\nu_{\text{ISL}}},$$

où $p \in \mathbb{N}$ est l'ordre d'interférence. On a par ailleurs $\nu = c/\lambda$ et donc

$$\begin{aligned} \delta\nu &= c \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{c}{\lambda} \frac{\delta\lambda}{\lambda} = p\Delta\nu_{\text{ISL}} \frac{\delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

On en déduit finalement le **facteur de qualité Q**

$$Q = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\nu}{\delta\nu} = p\mathcal{F}.$$

Le facteur de qualité, ou pouvoir de résolution, est défini comme l'inverse de la variation relative minimale de fréquence ou de longueur d'onde détectable par l'interféromètre. Il est d'autant plus grand que la finesse est grande et que l'ordre d'interférence est élevé. Contrairement à la finesse, sa valeur dépend donc de la façon dont on se sert de l'interféromètre !

2.3 On suppose que la source a deux composantes spectrales, λ et $\lambda + \Delta\lambda$. On observe donc la superposition de deux systèmes d'anneaux, de rayons différents. Les anneaux correspondants à ces deux longueurs d'onde sont distinguables si la largeur d'un anneau est plus petite que la distance entre deux anneaux.

Largeur d'un anneau Pour connaître la largeur d'un anneau brillant d'angle i_p tel que $\cos i_p = p\lambda/(2e)$, il suffit de calculer la variation δi qui induit une variation

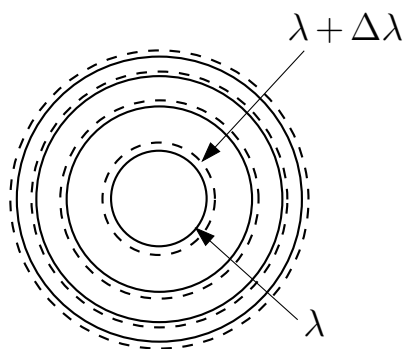


FIGURE 5.3 – Anneaux à la sortie du Fabry-Pérot pour une source polychromatique (λ et $\lambda + \Delta\lambda$).

$\delta\varphi$ de la phase. Puisque $\varphi = 4\pi e \cos i/\lambda$, on a simplement

$$\delta\varphi = \frac{4\pi e}{\lambda} \sin i \delta i, \quad \text{soit} \quad \delta i = \frac{\lambda}{4\pi e \sin i} \delta\varphi = \frac{\lambda}{4\pi e \sin i} \frac{2\pi}{\mathcal{F}} = \frac{\lambda}{2e \sin i} \frac{1}{\mathcal{F}}.$$

Distance entre deux anneaux Il faut cette fois estimer la variation Δi qui correspond, à l'ordre d'interférence p , à la variation $\Delta\lambda$ de longueur d'onde :

$$\sin i \Delta i = p \frac{\Delta\lambda}{2e}, \quad \text{soit} \quad \Delta i = p \frac{\Delta\lambda}{2e \sin i}.$$

L'intervalle spectral $\delta\lambda$ minimal pour lequel les anneaux d'interférence sont encore distinguables vérifie donc

$$\delta i = \Delta i \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = p\mathcal{F} = Q.$$

On retrouve la même relation que précédemment faisant intervenir le facteur de qualité du Fabry-Pérot.

EXERCICE VI AGRÉGATION 2005, ÉPREUVE A (PREMIÈRE PARTIE)

Cf. BUP et <http://www.agregation-physique.org>.