

Corrigé

Optique géométrique



Rappel : les sujets ainsi que les corrigés des épreuves d'agreg sont disponibles dans les BUP, ainsi que sur internet¹.

EXERCICE I RAPPELS

1. Définitions

1.1 À la surface de séparation de deux milieux transparents et homogènes d'indice n_1 et n_2 , appelée **dioptre**, une partie de la lumière est réfléchi et une autre est transmise (on parle de réfraction). On note i , i_r et i_t les angles entre la normale à la surface de séparation et les angles incident, réfléchi et transmis, respectivement (voir FIG. 1.1). Ces phénomènes sont régis par les lois de *Snell-Descartes* :

- Les rayons incident, réfléchi et réfracté ainsi que la normale au dioptre au point d'incidence appartiennent à un même plan d'incidence,
- $i = i_r$,
- $n_1 \sin i = n_2 \sin i_t$.

1.2 **Stigmatisme rigoureux** On considère un dispositif optique Σ et un couple de points A et A' (voir FIG. 1.2). Le dispositif Σ est dit *rigoureusement* (ou parfaitement) *stigmatique* pour le couple de points A , A' si tous les rayons issus de A , interceptés par Σ et émergents de Σ , s'interceptent tous au point A' en sortie du dispositif.

Les systèmes parfaitement stigmatiques sont rares (miroirs plans pour tout point de l'espace, miroir parabolique pour son foyer et l'infini...).

Stigmatisme approché Dans la plupart des cas, les rayons ne se recoupent pas exactement en un point, mais passent dans un petit élément de volume. Si cet élément de volume reste suffisamment petit, on parle de stigmatisme approché : si

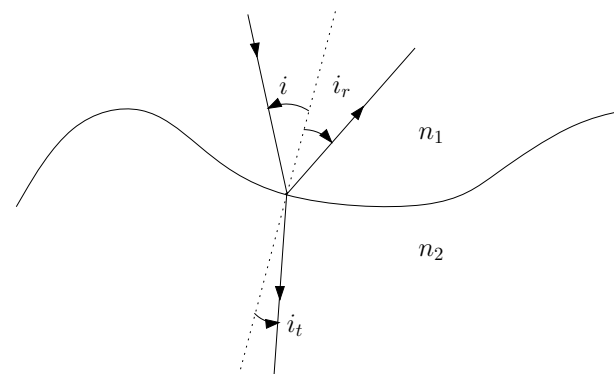


FIGURE 1.1 – Lois de Snell-Descartes

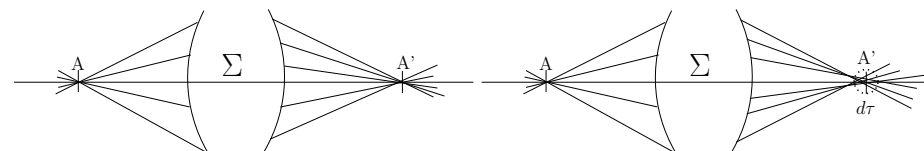


FIGURE 1.2 – Système optique rigoureusement stigmatique. Système optique approximativement stigmatique.

la tache qui en résulte est plus petite que la taille du détecteur élémentaire (grain photographique, bâtonnet de l'œil...), l'image paraît nette.

1.3 Un dispositif optique fait d'un objet à distance finie ou infinie une image à distance finie ou infinie. L'«efficacité» du dispositif optique peut alors être caractérisée par le rapport entre la «taille» de l'image et la «taille» de l'objet. Pour un objet à distance finie, la taille de l'objet est simplement donnée par... sa taille !, *i.e.* une longueur d . Pour un objet à l'infini, en revanche, on utilise l'angle α sous lequel on voit l'objet depuis le centre du dispositif optique.

Un dispositif optique faisant d'un objet à l'infini une image à l'infini est caractérisé par son angle α .

1. Sujets disponibles sur <https://poisson.ens.fr/Intranet/Wiki/index.php/Epreuves>, sujets et corrigés des dernières sessions sur <http://www.agregation-physique.org>.

térisé par son *grossissement* G , défini comme le rapport des angles

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

C'est le cas, par exemple, d'une lunette astronomique.

Un dispositif optique faisant d'un objet à distance finie une image à distance finie est caractérisé par son *grandissement* γ , défini comme le rapport des tailles

$$\gamma = \frac{d'}{d}.$$

C'est le cas, par exemple, d'un appareil photo.

Remarque On distingue parfois le grandissement transverse (rapport des tailles perpendiculaires à l'axe optique) du grandissement longitudinal (rapport des tailles parallèles à l'axe optique) ou encore du grandissement pupillaire (rapport du diamètre de la pupille de sortie sur le diamètre de la pupille d'entrée). Sans précision, on appelle grandissement le grandissement transverse.

Pour pousser le vice, on parle parfois de grandissement angulaire au lieu de grossissement.

Pour un dispositif optique faisant d'un objet à distance finie une image à l'infini, on ne peut pas utiliser simplement un rapport du type α/d : on ne compare pas des angles à des longueurs ! On utilise dans ce cas le *grossissement commercial* G_c , défini comme le rapport

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha_c},$$

où α_c est l'angle sous lequel est vu l'objet de taille d au *punctum proximum*, i.e. au point le plus proche de l'œil sur lequel il peut encore accommoder. Pour un œil «normal» le *punctum proximum* est à environ $d_m = 25$ cm et

$$\alpha_c = \frac{d}{d_m}.$$

1.4 Conditions de Gauss Ces conditions sont vérifiées lorsque les rayons sont peu inclinés sur l'axe optique et que l'écart à l'axe optique est faible par rapport aux distances longitudinales caractéristiques (distances focales ou autres).

Utilisés dans ces conditions, tous les dispositifs optiques usuels (lentilles minces, miroirs ou dioptries sphériques...) réalisent le stigmatisme approché. Une lentille utilisée dans les conditions de Gauss est un système stigmatique (stigmatisme approché). Cette propriété est essentielle pour la formation des images.

2. Lentille mince

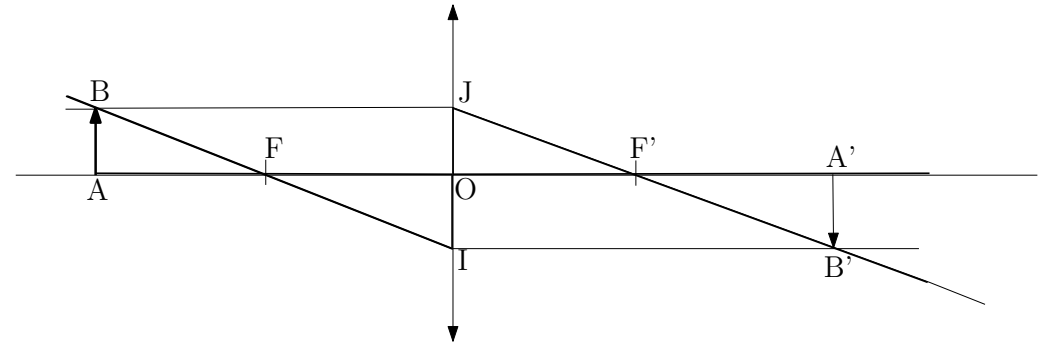


FIGURE 1.3 – Lentille mince.

2.1 Relations de conjugaison Soit une lentille **mince** \mathcal{L} de centre optique O , de foyer image F' et de foyer objet F . On note f et f' les distances focales objet et image, respectivement : $f' = \overline{OF'}$ et $f = -\overline{OF} = -f'$. On a $f' > 0$ pour une lentille convergente, et $f' < 0$ pour une lentille divergente. Pour A' , image de A par \mathcal{L} , les relations de conjugaison s'écrivent

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}. \quad (\text{I.1})$$

2.2 Relations de Newton On applique le théorème de Thalès dans les triangles ABF et FOI ,

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

ainsi que dans les triangles $A'B'F'$ et $F'OJ$

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

En combinant les deux expressions précédentes, on obtient

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \rightarrow \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \underbrace{\overline{F'O}}_{-f'} \cdot \underbrace{\overline{FO}}_{-f=f'}$$

D'où les relations de Newton :

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = ff' = -f'^2} \quad (\text{I.2})$$

2.3 Le grandissement transverse de la lentille est donné par $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$. Donc

$$\boxed{\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}}$$

2.4 La distance objet-image $\overline{AA'}$ s'écrit

$$\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{FF'} + \overline{F'A'} = \overline{AF} + 2f' + \frac{f'^2}{\overline{AF}}$$

Les positions de A qui extrêmisent $\overline{AA'}$, à f' fixé, vérifient donc

$$1 - \frac{f'^2}{\overline{AF}^2} = 0, \quad \text{soit} \quad \overline{AF} = \pm f'$$

Ces deux positions correspondent à des minima de AA' :

- $\overline{AF} = -f'$ correspond à $A = A' = O$: la distance objet-image est nulle, mais cette configuration a peu d'intérêt...
- $\overline{AF} = f'$ correspond à la configuration dite «4 f» : $\overline{AA'} = 4f'$. C'est la distance minimum entre A et A' , quand A et A' sont tous deux réels.

Dans la configuration «4 f», en utilisant le résultat de la partie précédente, le grandissement est $\gamma = -1$. Pour augmenter (diminuer) $|\gamma|$, il faut diminuer (augmenter) FA , *i.e.* rapprocher (éloigner) la lentille de l'objet.

2.5 On fixe maintenant la position de l'objet et de l'écran et l'on cherche où placer une lentille de focale f pour que l'image de l'objet par la lentille soit nette sur l'écran.

On note D la distance objet – écran. D'après le résultat de la question précédente, il n'y aura de positions possibles pour la lentille que si

$$\boxed{f' \leq D/4}$$

Pour trouver la position de la lentille, on remplace dans l'équation (I.1) \overline{OA} par $\overline{OA'} + \overline{A'A} = \overline{OA'} - D$ et on obtient simplement

$$\overline{OA'}^2 - D\overline{OA'} + f'D = 0,$$

qui n'a bien de solution que si $f' \leq D/4$. On a alors

$$\overline{OA'} = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f')}}{2}$$

Les deux positions possibles sont symétriques l'une de l'autre par rapport au milieu du segment objet-écran, et sont confondues si $D = 4f'$. Elles correspondent, en outre, à des grandissements inverses.

3. Principe du microscope

3.1 L'œil n'accomode pas si l'image est à l'infini. Il faut donc que l'image intermédiaire soit dans le plan focal de l'oculaire. L'idée du microscope est d'obtenir une image agrandie que l'on observe ensuite à la loupe (oculaire).

3.2 Puisque le microscope forme d'un objet à distance finie une image à l'infini, on cherche à calculer le grossissement commercial G_c de ce dispositif optique. On note Δ l'intervalle optique, défini comme la distance entre F'_1 et $A_1 \equiv F_2$. Le grandissement γ_{ob} de la lentille L_1 est défini par

$$\gamma_{\text{ob}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $O_1A_1B_1$ et O_1AB ainsi que les relations de Newton (I.2), on obtient

$$\gamma_{\text{ob}} = \frac{\Delta + f'_1}{-f'_1 - \frac{f'^2_1}{\Delta}} = -\frac{\Delta}{f'_1}$$

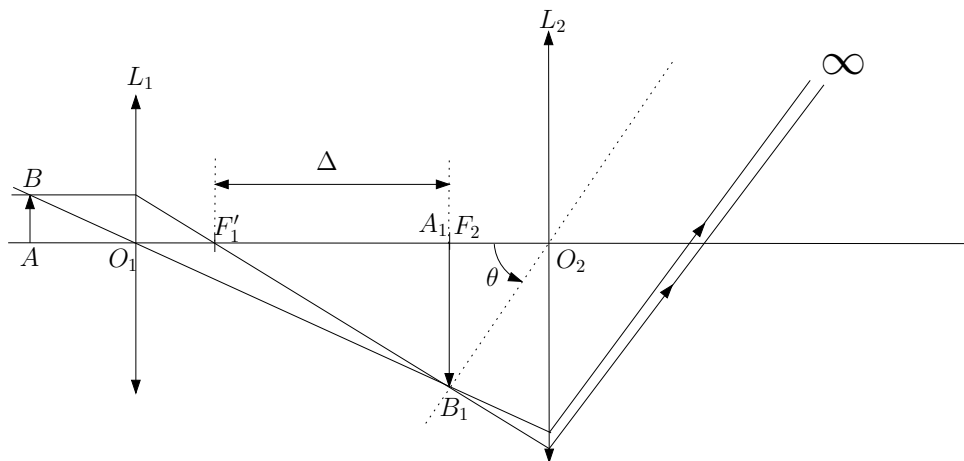


FIGURE 1.4 – Modélisation d'un microscope par deux lentilles minces.

L'angle θ sous lequel est vue l'image dans l'oculaire du microscope est alors

$$\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{f_2} = \frac{\Delta}{f_1 f_2} \overline{AB}.$$

Soit α_m l'angle sous lequel l'œil voit AB à $d_m = 25$ cm (*punctum proximum*).
Par définition

$$G_c = \frac{\theta}{\alpha_m}.$$

Comme $\alpha_m = \frac{\overline{AB}}{d_m}$, on obtient finalement

$$G_c = \frac{\Delta d_m}{f_1 f_2}.$$

Enfin, puisque le grossissement commercial $G_{c,oc}$ de l'oculaire est donné par

$$G_{c,oc} = \frac{d_m}{f_2},$$

on peut écrire

$$G_c = \gamma_{ob} \times G_{c,oc}.$$

Le grossissement commercial du microscope est le produit du grossissement de l'objectif et du grossissement commercial de l'oculaire.

3.3 Si l'on place un objet de taille \overline{AB} dans le plan principal objet du microscope, son image $\overline{A'B'}$ est dans le plan principal image et le grossissement est $\gamma = +1$.

$$1 = \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}},$$

où A_1B_1 est l'image intermédiaire de AB . Ces deux fractions correspondent aux grossissements des deux lentilles. En utilisant les résultats précédents, on a donc

$$1 = -\frac{\overline{F_1'A_1}}{f_1'} \frac{f_2'}{\overline{F_2A_1}}, \text{ soit}$$

$$\overline{F_2A_1} = -\Delta + \overline{F_1'A_1} = -\frac{f_2'}{f_1'} \overline{F_1'A_1} \text{ et}$$

$$\overline{F_1'A_1} = \frac{\Delta}{1 + \frac{f_2'}{f_1'}}.$$

En utilisant les relations de Newton, on obtient finalement

$$\overline{AF_1} = \frac{f_1 f_2 + f_1^2}{\Delta}.$$

Par symétrie, on peut écrire directement

$$\overline{F_2'A'} = \frac{f_1 f_2 + f_2^2}{\Delta}.$$

Géométriquement (voir figure 1.5), on trouve la position du plan principal image en traçant la trajectoire d'un rayon lumineux parallèle à l'axe optique en entrée du dispositif. L'intersection du rayon émergent avec le prolongement virtuel du rayon incident repère le lieu du plan principal image. On procède de façon symétrique pour trouver le plan principal objet.

Les points d'intersection des plans principaux objet et image avec l'axe optique sont en général notés H et H' , respectivement. La distance HH' entre les plans

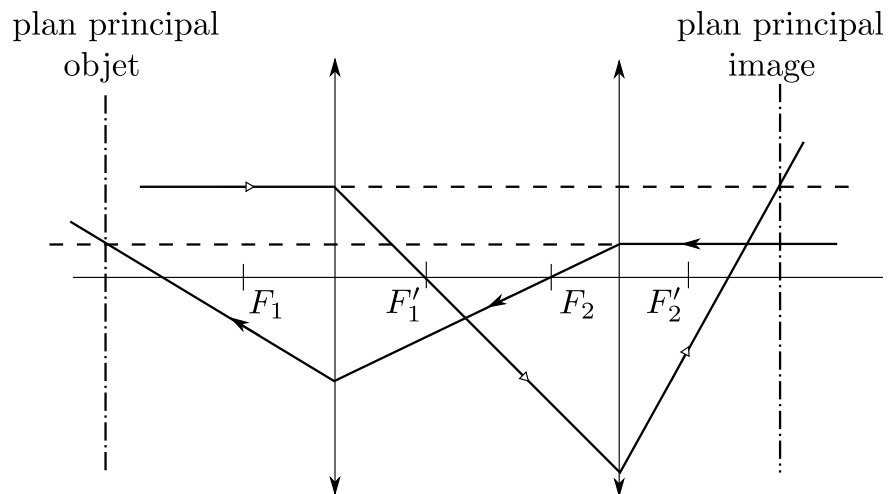


FIGURE 1.5 – Construction des plans principaux du microscope

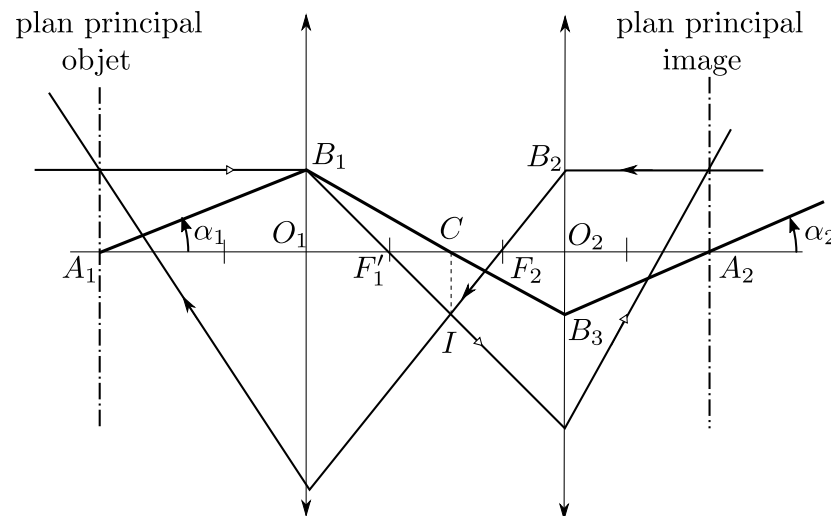


FIGURE 1.6 – Points nodaux du microscope

principaux est appelée *interstice*. Ici, on peut calculer la valeur de l'interstice :

$$\begin{aligned} \overline{HH'} &= \overline{AF_1} + \overline{F_1F_1'} + \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2F_2'} + \overline{F_2'A'} \\ &= \frac{f_1 f_2 + f_1'^2}{\Delta} + 2f_1' + \Delta + 2f_2' + \frac{f_1 f_2 + f_2'^2}{\Delta} \\ &= \frac{(f_1' + f_2')^2}{\Delta} + 2(f_1' + f_2') + \Delta. \end{aligned}$$

3.4 On souhaite ici montrer que les points A_1 et A_2 , intersections de l'axe optique avec les plans principaux objet et image, respectivement, sont aussi les points nodaux du système. Cela revient à montrer que les angles α_1 et α_2 (voir figure 1.6) sont égaux.

Le théorème de Thalès dans le triangle $F_1'CI$ et $F_1'O_1B_1$ nous permet d'écrire

$$\frac{\overline{F_1'C}}{-f_1'} = \frac{\overline{CI}}{\overline{O_1B_1}}.$$

De même

$$\frac{\overline{F_2C}}{f_2'} = \frac{\overline{CI}}{\overline{O_2B_2}}.$$

Puisque A_1 et A_2 sont dans les plans principaux, on a en outre $\overline{O_2B_2} = \overline{O_1B_1}$. On en déduit que

$$\frac{\overline{CF_2}}{\overline{F_1'C}} = \frac{f_2}{f_1}, \quad \text{et donc} \quad \frac{\overline{CO_2}}{\overline{O_1C}} = \frac{\overline{CF_2} + f_2'}{f_1' + \overline{F_1'C}} = \frac{f_2}{f_1}.$$

Le théorème de Thalès dans les triangles CO_1B_1 et CO_2B_3 permet enfin d'écrire

$$\frac{\overline{O_2B_3}}{\overline{O_1B_1}} = \frac{\overline{CO_2}}{\overline{CO_1}} = -\frac{f_2}{f_1}.$$

En utilisant les résultats de la question précédente, on a par ailleurs

$$\begin{aligned} \overline{A_1O_1} &= \overline{A_1F_1} + f_1' = f_1' \frac{f_1' + f_2' + \Delta}{\Delta}, \\ \overline{O_2A_2} &= \overline{F_2'A_2} + f_2' = f_2' \frac{f_1' + f_2' + \Delta}{\Delta}, \end{aligned}$$

dont on déduit que

$$\frac{\overline{O_2B_3}}{\overline{O_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_1A_1}} = -\frac{f_2}{f_1}.$$

On a donc finalement $\tan \alpha_2 = \tan \alpha_1$ soit $\alpha_2 = \alpha_1$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque On note en général N et N' les points nodaux objet et image, respectivement. Ici, les points nodaux et les plans principaux sont confondus : $H = N$ et $H' = N'$. C'est en fait toujours le cas quand les milieux en entrée et en sortie du dispositif optique ont la même indice optique.

Dans le cas général, on peut montrer simplement l'égalité $\overline{HH'} = \overline{NN'}$. L'interstice peut donc être indifféremment défini comme la distance entre les plans principaux ou les points nodaux.

4. Profondeur de champ

4.1 Par définition, le nombre d'ouverture n est défini par

$$n = \frac{f'}{D}.$$

La profondeur de champ est la distance qui sépare deux points extrêmes de l'axe optique dont les images sont vues avec une netteté suffisante sur le détecteur (pellicule, œil, CCD...).

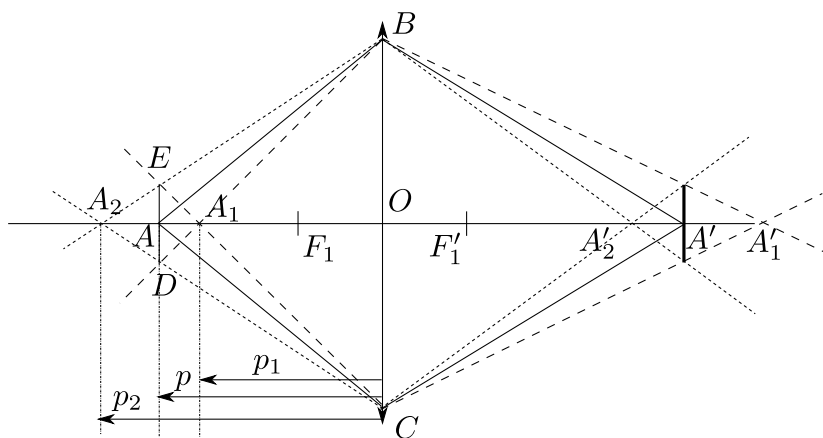


FIGURE 1.7 – Profondeur de champ.

4.2 On considère le point A dont on veut faire l'image, ainsi que A_1 et A_2 les deux points objets extrêmes, situés sur l'axe optique, dont les images s'étalent sur une tache de taille inférieure à a dans le plan de A' . Soit γ le grandissement de l'appareil photo. On note p , p_1 et p_2 les distances \overline{OA} , $\overline{OA_1}$ et $\overline{OA_2}$, respectivement. On a

$$\gamma = \frac{f'}{F_1A} = \frac{f'}{p - f'} \approx \frac{f'}{p} \text{ si } p \gg f',$$

approximation vérifiée en général pour un appareil photo : contrairement au microscope, il fait l'image d'un objet éloigné. On applique le théorème de Thalès dans les triangles A_2AE et A_2OB puis dans les triangles A_1AE et A_1OC . On obtient alors les relations suivantes

$$\frac{p_2 - p}{EA} = \frac{p_2}{D/2} \quad \text{et} \quad \frac{p - p_1}{EA} = \frac{p_1}{D/2},$$

d'où

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{2EA}{D}.$$

Or $a = \gamma \cdot ED = 2\gamma EA$, donc

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{a}{\gamma D} = \frac{an}{\gamma f'},$$

où n est le nombre d'ouverture.

On pose $u = \frac{a}{\gamma f'}$, et on obtient

$$\frac{p_2 - p}{p_2} = \frac{p - p_1}{p_1} = nu, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{p}{1+nu}, \\ p_2 = \frac{p}{1-nu}. \end{cases}$$

La profondeur de champ $\delta = p_2 - p_1$ est alors donnée par

$$\delta = \frac{2pun}{1 - u^2n^2} = \frac{2p}{\frac{1}{nu} - nu}.$$

Remarques On constate que la profondeur de champ diverge quand $nu \rightarrow 1$. En fait, quand $nu = 1$, le point A_2 est confondu avec le point focal image F'_1 , le point A_2 est donc à l'infini. Si l'on continue de faire croître nu , alors le point A_2 devient virtuel et donc δ , tel que calculé, est négatif. Toutefois, tous les points de l'axe optique, situés au-delà du point A_1 , apparaissent nets sur l'écran.

On peut noter que, dans cette situation, l'objectif (de taille D) est plus petit que l'objet dont l'image par la lentille est un pixel (de taille a/γ). Seuls les objets significativement plus grands que l'objectif ont une image qui occupe plusieurs pixels. C'est une situation qui peut se rapprocher de l'appareil photo d'un téléphone portable, pour lequel aucune mise au point n'est pour ainsi dire nécessaire.

On voit par ailleurs que la relation entre profondeur de champ et nombre d'ouverture n'est pas «simple» en général, en particulier δ n'est pas proportionnel à n . En revanche, comme $1/(nu) - nu = \gamma D/a - a/\gamma D$ est une fonction croissante de D , la profondeur de champ δ décroît bien quand l'ouverture de l'objectif D augmente, ou encore quand le nombre d'ouverture n diminue.

Dans la limite des grandes ouvertures, $\delta \approx 2ap/\gamma D \propto 1/D \propto n$.

EXERCICE II STIGMATISME ET APLANÉTISME

1. Lois de Snell-Descarts

1.1 *Principe de Fermat* Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet suivi par la lumière est *stationnaire*.

1.2 On considère le dioptre sphérique dessiné FIG. 2.1, et le rayon lumineux qui relie les points A_1 et A_2 . D'après le principe de Fermat, puisque le trajet suivi par la lumière est le chemin A_1IA_2 , son chemin optique est stationnaire. Si on le modifie en déplacement de façon infinitésimale le point I du dioptre vers le point I' du dioptre, infiniment proche de I , alors le chemin optique ne varie pas, au premier ordre en $dI = II'$. En notant $L_I(A_1A_2)$ le chemin optique correspondant au trajet qui relie A_1 et A_2 en passant par le point I , on peut écrire

$$dL_I(A_1A_2) = L_{I'}(A_1A_2) - L_I(A_1A_2) = 0.$$

1.3 De façon générale, si l'on considère un segment $[AB]$, de vecteur directeur unitaire \mathbf{u} , sa variation de longueur engendrée par un déplacement du point B du vecteur $d\mathbf{B}$ et un déplacement du point A du vecteur $d\mathbf{A}$ est donnée par

$$dAB = d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{AB}) = \mathbf{u} \cdot d\mathbf{AB} + \mathbf{AB} \cdot d\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{B} - d\mathbf{A}) + AB \mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}.$$

Or, $\mathbf{u}^2 = 1$, donc $d\mathbf{u}^2 = 0$. Comme $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} = d\mathbf{u}^2/2$, on en déduit que

$$dAB = \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{B} - d\mathbf{A}). \quad (\text{II.1})$$

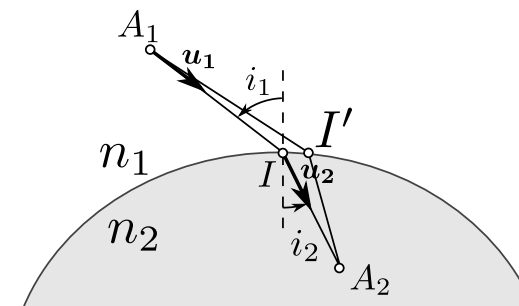


FIGURE 2.1 – Lois de Snell-Descartes par le principe de Fermat

Dans le cas présent, on utilise la relation précédente pour calculer $dL_I(A_1A_2)$:

$$dL_I(A_1A_2) = L_{I'}(A_1A_2) - L_I(A_1A_2) = n_1 \mathbf{u}_1 \cdot d\mathbf{I} - n_2 \mathbf{u}_2 \cdot d\mathbf{I},$$

dont on déduit que

$$(n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2) \cdot d\mathbf{I} = 0.$$

Comme $d\mathbf{I}$ est tangent au dioptre au point I , en notant \mathbf{N} le vecteur normal au dioptre en I , on déduit de la relation précédente que

$$\boxed{n_1 \mathbf{u}_1 - n_2 \mathbf{u}_2 = a\mathbf{N}}, \quad (\text{II.2})$$

où a est un scalaire.

1.4 L'équation (II.2) est l'expression vectorielle des lois de Snell-Descartes. En effet, elle permet de constater immédiatement que le rayon réfracté de direction \mathbf{u}_2 est dans le plan formé par les vecteur \mathbf{u}_1 et \mathbf{N} , *i.e.* le plan d'incidence.

Par ailleurs, en prenant le produit vectoriel de cette équation par le vecteur \mathbf{N} , on trouve immédiatement que

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

2. Stigmatisme et aplanétisme

2.1 On suppose que le dispositif Σ est rigoureusement stigmatique pour les points A_o et A_i . Ainsi, tous les rayons émergents de A_o sortent du dispositif en se croisant

au point A_i . D'après le principe de Fermat, tous les chemins $A_o I J A_i$ sont donc stationnaires, puisqu'ils correspondent à un trajet que suit effectivement la lumière.

Considérons le point \tilde{I} de la face d'entrée de Σ , infiniment proche de I . Le rayon émergent correspondant au rayon incident $A\tilde{I}$ sort de Σ au point \tilde{J} infiniment proche de J et passe par A_i , exactement, car Σ est rigoureusement stigmatique. Puisque le chemin $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ est obtenu par un déplacement infinitésimal de I et J , et que le chemin $A_o I J A_i$ est stationnaire, les chemins $A_o I J A_i$ et $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ sont égaux. Or, le chemin $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ est, par construction, lui aussi un chemin stationnaire. On peut donc opérer de la même façon en considérant un point \tilde{I}_2 infiniment proche de \tilde{I} . On comprend alors que l'on peut transformer le chemin $A_o I J A_i$ en le chemin $A_o I' J' A_i$ par une succession de déplacements infinitésimaux des points d'entrée et sortie sans jamais changer la valeur du chemin optique et ayant, à toute étape, un chemin stationnaire. Dans le cas présent, on en déduit que les trajets $A_o I J A_i$ et $A_o I' J' A_i$ ont même chemin optique. Autrement dit, le chemin optique $L_I(A_o A_i)$ ne dépend pas du choix de I .

Il faut noter que si Σ n'avait pas été rigoureusement stigmatique, le chemin $A_o \tilde{I} \tilde{J} A_i$ n'aurait pas été lui-même stationnaire et nous n'aurions pas pu prolonger le raisonnement au point \tilde{I}_2 et donc jusqu'au point I' .

2.2 Condition des sinus d'Abbe On considère maintenant deux points B_o et B_i , infiniment proches de A_o et A_i , et tels que $\mathbf{A}_o \mathbf{B}_o$ et $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i$ soient orthogonaux à l'axe optique. On cherche la condition à laquelle Σ est rigoureusement stigmatique pour les points B_o et B_i , auquel cas il est dit aplanétique. On trace figure 2.2 la trajectoire du rayon lumineux issu de B_o qui intercepte Σ en I . Puisque Σ est stigmatique pour B_o et B_i , en sortie de Σ , ce rayon passe nécessairement par B_i . Puisque B_o et B_i sont infiniment proches de A_o et A_i , le rayon émergent sort de Σ au point J' infiniment proche de J . D'après la question précédente, on peut par ailleurs écrire

$$\begin{aligned} L_I(B_o B_i) &= n_o \overline{B_o I} + L(IJ') + n_i \overline{J' B_i} = b, \\ L_I(A_o A_i) &= n_o \overline{A_o I} + L(IJ) + n_i \overline{J A_i} = a, \end{aligned}$$

où a et b sont deux constantes a priori distinctes. La différence de ces deux équations permet d'écrire

$$\begin{aligned} L_I(B_o B_i) - L_I(A_o A_i) &= n_o (\overline{B_o I} - \overline{A_o I}) + L(IJ') - L(IJ) + n_i (\overline{J' B_i} - \overline{J A_i}) = b - a, \\ &= -n_o \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{A}_o \mathbf{B}_o + L(IJ') - L(IJ) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{J} \mathbf{J}' + n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i. \end{aligned}$$

Or, la longueur $L(IJ') - L(IJ) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{J} \mathbf{J}'$ correspond en fait exactement à la varia-

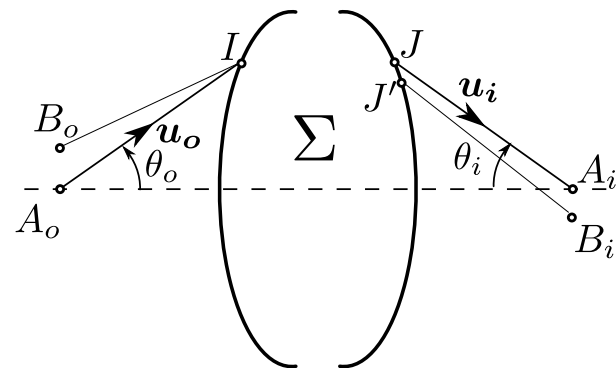


FIGURE 2.2 – Condition des sinus d'Abbe

tion de chemin optique obtenue en déformant le trajet $I J A_i$ par la transformation infinitésimale qui amène J en J' . Puisque le trajet $I J A_i$ est un trajet qui est effectivement suivi par la lumière, d'après le principe de Fermat, le chemin optique le long de ce trajet est stationnaire, il ne varie donc pas lorsqu'on applique au trajet cette transformation infinitésimale. Cela permet d'écrire

$$L(IJ') - L(IJ) - n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{J} \mathbf{J}' = 0 \quad \text{et donc} \quad n_i \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i - n_o \mathbf{u}_o \cdot \mathbf{A}_o \mathbf{B}_o = \text{cte.}$$

En utilisant les angles θ_o et θ_i , cette dernière équation se réécrit

$$n_i \overline{A_i B_i} \sin \theta_i - n_o \overline{A_o B_o} \sin \theta_o = \text{cte.}$$

On calcule la constante dans l'équation précédente en constatant que si $\theta_o = 0$ alors $\theta_i = 0$. La constante est donc nulle et

$$\boxed{n_i \overline{A_i B_i} \sin \theta_i - n_o \overline{A_o B_o} \sin \theta_o = 0}, \quad (\text{II.3})$$

ou

$$\boxed{\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_i} = \frac{n_i}{n_o} \gamma}, \quad (\text{II.4})$$

où $\gamma = \overline{A_i B_i} / \overline{A_o B_o}$ est le grandissement de Σ . Cette équation, sous la forme (II.3) ou (II.4), est appelée *condition des sinus d'Abbe*.

3. Applications : points de Weierstrass

3.1 D'après les résultats des questions précédentes, le dioptre n'est stigmatique que si le chemin optique $L_I(A_1A_2)$ est indépendant du choix de I , point du dioptre. Cela revient à dire qu'il existe une constante a telle que pour tout point du dioptre,

$$n_1 \overline{A_1 I} + n_2 \overline{I A_2} = a.$$

3.2 On suppose maintenant que $a = 0$. On constate alors immédiatement que $\overline{A_1 I}$ et $\overline{I A_2}$ sont de signes opposés. Les segments $[A_1 I]$ et $[I A_2]$ sont donc parcourus par la lumière de A_1 vers I et de A_2 vers I , ou de I vers A_1 et de I vers A_2 . Cela n'est possible que si A_1 est réel et A_2 virtuel ou si A_1 est virtuel et A_2 réel.

On cherche maintenant tous les points de l'espace qui vérifient la condition

$$n_1 \overline{A_1 I} + n_2 \overline{I A_2} = 0. \quad (\text{II.5})$$

Il est alors pratique de prendre l'origine des axes au point O , point du segment $[A_1 A_2]$ qui vérifie cette condition, et la droite $(A_1 A_2)$ comme axe des abscisses. Les points A_i ont donc pour coordonnées $(x = x_i, y = 0)$. On a, en notant $d = A_1 A_2$ et $K = n_1/n_2$,

$$x_2 = \frac{dK}{K+1} \quad \text{et} \quad x_1 = -\frac{d}{K+1}.$$

On remarque en particulier qu'on a bien $n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0$.

Les points I , de coordonnées (x, y) , qui vérifient la condition (II.5) vérifient également $n_1^2 (A_1 I)^2 = n_2^2 (A_2 I)^2$, qui se réécrit

$$n_1^2 [(x - x_1)^2 + y^2] = n_2^2 [(x - x_2)^2 + y^2].$$

En développant l'équation ci-dessus, et en utilisant $n_1^2 x_1^2 = n_2^2 x_2^2$, on obtient finalement

$$\left(x + \frac{dK}{K^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{dK}{K^2 - 1}\right)^2,$$

qui est l'équation d'un cercle de rayon $R = \frac{dK}{|K^2 - 1|}$, centré au point C de coordonnées $\left(x_C = \frac{dK}{1 - K^2}, y_C = 0\right)$.

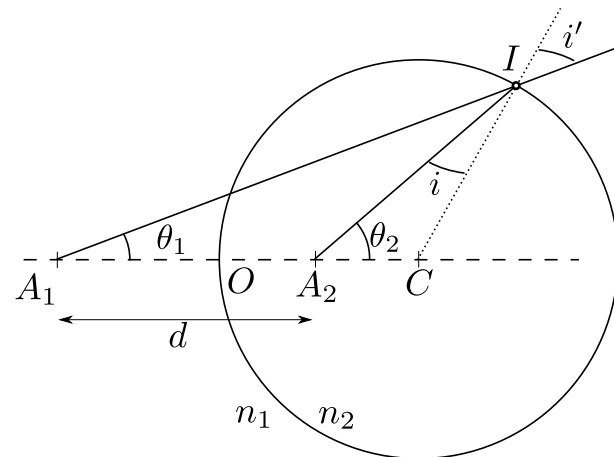


FIGURE 2.3 – Dioptre sphérique

3.3 Un dioptre sphérique de rayon R , de centre C , séparant deux milieux d'indices n_1 et $n_2 = n_1/K$, est donc rigoureusement stigmatique pour les points situés sur l'axe (OC) , où O est un point quelconque du dioptre, à distance $x_2 = \frac{dK}{K+1}$ et $x_1 = -\frac{d}{K+1}$ de O , où $d = x_2 - x_1 = R|K^2 - 1|/K$. Ces points sont appelés points de Weierstrass.

3.4 On souhaite maintenant montrer que le dioptre sphérique est également aplanétique au niveau des points de Weierstrass. Cela revient à montrer que les angles θ_1 et θ_2 , figure 2.3, vérifient la condition des sinus d'Abbe. Pour cela, on utilise la relation des sinus dans le triangle $A_2 C I$, qui nous permet d'écrire

$$\frac{\sin \theta_2}{CI} = \frac{\sin i}{A_2 C}.$$

De même, dans le triangle $A_1 C I$, on a

$$\frac{\sin \theta_1}{CI} = \frac{\sin i'}{A_1 C}.$$

On déduit des deux équations précédentes que

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{\sin i}{\sin i'} \frac{A_1 C}{A_2 C} = \frac{n_1}{n_2} \frac{A_1 C}{A_2 C},$$

où la dernière égalité a été obtenue en utilisant les lois de Snell-Descartes. Grâce aux résultats des questions précédentes, on sait par ailleurs que

$$A_1C = A_1O + OC = -x_1 + x_C = \frac{d}{1 - K^2},$$

$$A_2C = A_2O + OC = -x_2 + x_C = \frac{dK^2}{1 - K^2}.$$

On en déduit finalement que

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{K^2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (\text{II.6})$$

Le rapport des sinus est donc bien une constante. Il reste à montrer que cette constante est donnée par la condition des sinus d'Abbe.

On considère maintenant un point B_1 au voisinage de A_1 , avec (A_1B_1) orthogonal à l'axe (A_1C) . On construit, comme indiqué sur la figure 2.4, le point B_2 comme l'intersection de (B_1C) et de la droite orthogonale à l'axe optique passant par A_2 . On veut montrer que, pour tous les couples de points $\{B_1, B_2\}$ ainsi construits, la condition des sinus d'Abbe est vérifiée, et donc que le dioptre est aplanétique.

On utilise pour cela le théorème de Thalès dans les triangles CA_1B_1 et CA_2B_2 :

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CA_2}} = \frac{1}{K^2} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.$$

Avec le résultat (II.6), il vient alors directement

$$n_1 \overline{A_1B_1} \sin \theta_1 = n_2 \overline{A_2B_2} \sin \theta_2,$$

i.e. la condition des sinus d'Abbe. Le dioptre est donc aussi rigoureusement stigmatique pour les points B_1 et B_2 . Il est aplanétique au niveau de ses points de Weierstrass.

Remarque De façon plus complexe, on peut montrer, sans chercher à vérifier la condition des sinus d'Abbe, que le dioptre est bien stigmatique pour B_1 et B_2 . Cela revient à montrer que les angles d'incidence des rayons (B_1I) et (B_2I) vérifient les

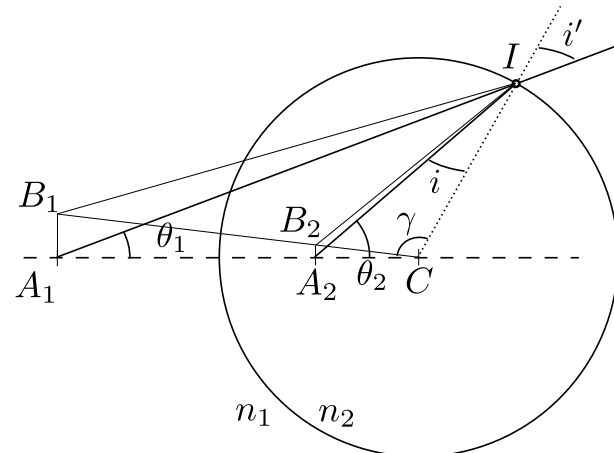


FIGURE 2.4 – Condition des sinus d'Abbe pour le dioptre sphérique

lois de Snell-Descartes, quel que soit le point I . La relation des sinus dans les triangles CB_1I et CB_2I nous permet d'écrire

$$\frac{\sin \gamma}{B_1I} = \frac{\sin i'_1}{CB_1} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \gamma}{B_2I} = \frac{\sin i'_2}{CB_2},$$

où l'on note $i'_1 = \widehat{CIB_1}$ et $i'_2 = \widehat{CIB_2}$. Par ailleurs, le théorème de Thalès dans les triangles CA_1B_1 et CA_2B_2 permet d'écrire

$$\frac{CB_2}{CB_1} = \frac{CA_2}{CA_1} = K^2.$$

On a donc

$$\sin i'_1 = \frac{B_2I}{B_1I} \frac{CB_1}{CB_2} \sin i'_2 \sim \frac{A_2I}{A_1I} K^{-2} \sin i'_2.$$

Enfin, comme I est sur le dioptre sphérique pour lesquels A_1 et A_2 sont des points de Weierstrass, $n_1 A_1I = n_2 A_2I$. L'équation précédente devient donc finalement

$$\sin i'_1 = \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin i'_2 \quad \text{soit} \quad n_1 \sin i'_1 = n_2 \sin i'_2.$$

Les deux points B_1 et B_2 ainsi construits sont donc bien conjugués par le dioptre sphérique.

EXERCICE III ABERRATION DES LENTILLES

1. On introduit les angles $\varphi, \alpha, \gamma, i_1$ et i_2 tels qu'indiqués sur la figure 3.1.

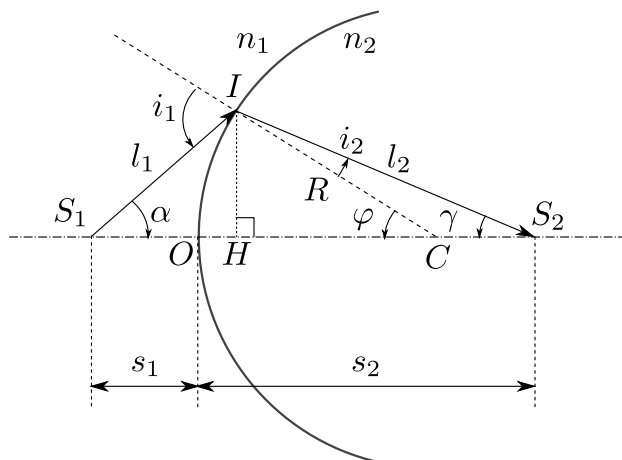


FIGURE 3.1 – Dioptre sphérique de rayon R

1.1 On utilise dans un premier temps la relation des sinus dans les triangles S_1IC et S_2IC . Cela nous permet d'écrire les égalités

$$\frac{\sin i_2}{CS_2} = \frac{\sin \gamma}{IC} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\pi - i_1)}{S_1C} = \frac{\sin \varphi}{IS_1}.$$

En notant alors que $CS_2 = s_2 - R$, $S_1C = s_1 + R$ et que $\sin \gamma = IH/l_2 = \sin \varphi R/l_2$, on obtient

$$\frac{\sin i_2}{s_2 - R} = \frac{\sin \varphi}{l_2} \quad \text{et} \quad \frac{\sin i_1}{R + s_1} = \frac{\sin \varphi}{l_1}.$$

Enfin, les lois de Snell-Descartes nous permettent d'écrire $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$, soit finalement

$$n_2(s_2 - R) \frac{\sin \varphi}{l_2} = n_1(s_1 + R) \frac{\sin \varphi}{l_1},$$

et donc

$$\frac{n_1}{l_1} + \frac{n_2}{l_2} = \frac{1}{R} \left(\frac{n_2 s_2}{l_2} - \frac{n_1 s_1}{l_1} \right).$$

Ici, la position du point S_2 dépend de l'angle d'incidence i_1 via la grandeur l_1 : le dioptre sphérique n'est en général pas stigmatique.

1.2 Si l'on ne considère que des rayons proches de l'axe, on a alors $s_1 \approx l_1$ et $s_2 \approx l_2$. L'équation précédente se réécrit alors sous la forme plus simple

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{1}{R}(n_2 - n_1),$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{n_2}{OS_2} - \frac{n_1}{OS_1} = \frac{1}{OC}(n_2 - n_1).$$

Dans ce cas, la position du point S_2 ne dépend plus de l'angle d'incidence mais seulement de la distance du point objet au sommet du dioptre : le dioptre sphérique, dans les conditions de Gauss, est stigmatique.

1.3 On associe maintenant deux dioptres sphériques de rayons R et R' , de centres C et C' et de sommets O et O' (voir figure 3.2). On note A_i l'image intermédiaire que fait de A le premier dioptre sphérique, et A' l'image que fait de A_i le second dioptre. D'après le résultat de la question précédente, on a

$$\frac{n}{OA_i} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OC}(n - 1),$$

$$\frac{1}{O'A'} - \frac{n}{O'A_i} = \frac{1}{O'C'}(1 - n),$$

Ce qui nous permet finalement d'écrire la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{O'A'} - \frac{1}{OA} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) + n \frac{\overline{OO'}}{O'A_i \cdot OA_i}.$$

On retrouve ici les relations de conjugaison rappelées au premier exercice, pour une lentille mince, *i.e.* dans la situation où $O \sim O'$, en introduisant la focale f de la lentille :

$$\frac{1}{O'A'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

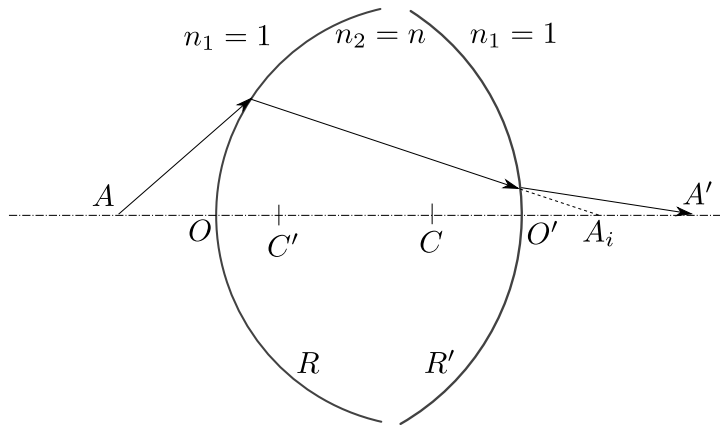


FIGURE 3.2 – Association de deux dioptrés sphériques. Sur le dessin, $R = \overline{OC} > 0$ et $R' = \overline{O'C'} < 0$.

2. *Aberrations chromatiques* On voit, dans l'expression de la focale de la lentille ainsi créée, que f dépend de l'indice du matériau, et donc de la longueur d'onde de la lumière utilisée. La position de l'image d'un objet dépend donc a priori de la longueur d'onde : la lentille souffre d'aberrations dites chromatiques.

2.1 Etant donné les indices et les rayons de courbures donnés, on trouve pour la lentille en BK7 considérée :

$$\begin{aligned} \lambda = 400 \text{ nm} &\rightarrow f = 48,9 \text{ cm}, \\ \lambda = 590 \text{ nm} &\rightarrow f = 50,2 \text{ cm}, \\ \lambda = 800 \text{ nm} &\rightarrow f = 50,6 \text{ cm}. \end{aligned}$$

On constate donc que la lentille fait converger les rayons bleus plus vite que les rayons rouges, avec une grande différence de distance focale, clairement visible à l'œil nu ! Les aberrations chromatiques d'une telle lentille sont très fortes.

2.2 On éclaire la lentille avec un faisceau, centré, de diamètre D (voir figure 3.3). En notant δ la taille de la tache moyenne, et $\Delta = f_r - f_b$ la distance entre les points focaux images bleu et rouge, on a

$$\alpha_b = \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \alpha_r = \frac{\delta}{\Delta - \varepsilon}$$

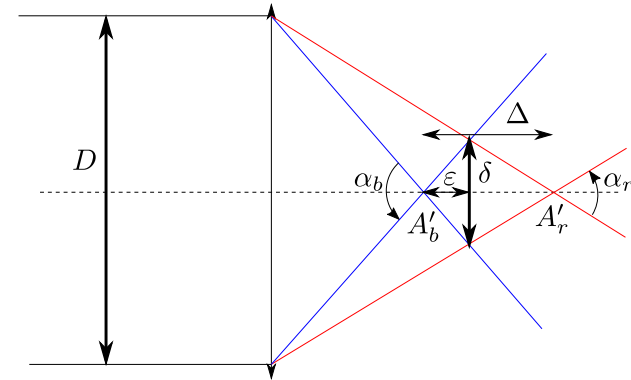


FIGURE 3.3 – Aberrations chromatiques

dont on déduit

$$\delta = \Delta \frac{\alpha_r \alpha_b}{\alpha_r + \alpha_b}.$$

En notant enfin que $\alpha_{r,b} = D/f_{r,b}$, la tache de la taille moyenne due aux aberrations chromatiques est finalement

$$\delta = D \frac{f_r - f_b}{f_r + f_b} \approx 1,3 \text{ mm}.$$

Classification de verres Pour distinguer les verres en fonction de leur pouvoir dispersif, on introduit en général le coefficient appelé *nombre d'Abbe* ou *constriction*, et défini comme

$$A = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C},$$

où n_D est l'indice du verre à $\lambda = 587,86 \text{ nm}$ (raie jaune de l'hélium), n_C est l'indice du verre à $\lambda = 656,3 \text{ nm}$ (raie rouge), et n_F est l'indice du verre à $\lambda = 486,1 \text{ nm}$ (raie bleue). D'autres longueurs d'onde sont parfois utilisées dans la définition de ce nombre, en particulier si l'on s'intéresse à une autre gamme du spectre optique que le spectre visible. Ce nombre est défini tel que plus A est grand, moins le verre est dispersif.

On distingue alors

- Les verres *crown*, peu dispersifs ($A > 50$) et d'indice optique limité ($n_D < 1,6$). Ce sont typiquement des silicates de potassium et de calcium, et notamment le verre très répandu appelé BK7 ;
- Les verres *flint*, très dispersifs ($A < 50$) et d'indice optique élevé ($n_D > 1,6$). Ils contiennent souvent du plomb ou de l'arsenic, quoique les versions les plus récentes de ces verres en sont dépourvues.

2.3 On a vu, à la question précédente, qu'une lentille convergente envoie le rouge plus loin sur l'axe optique que le bleu. La situation serait en fait inversée si la lentille était divergente. Dans ce cas en effet, le point focal image (virtuel) est toujours plus proche de la lentille pour le bleu que pour le rouge. Ils sont toutefois situés du même côté de la lentille que l'objet, et le point focal bleu est donc plus loin sur l'axe optique que le point focal rouge.

On conçoit alors bien qu'il doit être possible de corriger les aberrations chromatiques des lentilles en associant une lentille convergente et une lentille divergente d'un verre différent, pour ramener les points focaux rouge et bleu au même endroit.

On accole donc une seconde lentille de focale f_2 à la première de focale f_1 déjà considérée. La focale du doublet ainsi créé est donnée par

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \text{ où } \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)K_1 \text{ et } \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)K_2.$$

On a introduit ici les deux facteurs qui ne dépendent que de la géométrie des lentilles, et en particulier indépendants de l'indice,

$$K_i = \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R'_i}.$$

On cherche à ce que, pour le doublet, $f_r = f_b$. On a alors l'égalité

$$(n_1^b - 1)K_1 + (n_2^b - 1)K_2 = (n_1^r - 1)K_1 + (n_2^r - 1)K_2,$$

dont on déduit simplement

$$K_2 = K_1 \frac{n_1^r - n_2^r}{n_1^b - n_2^b}.$$

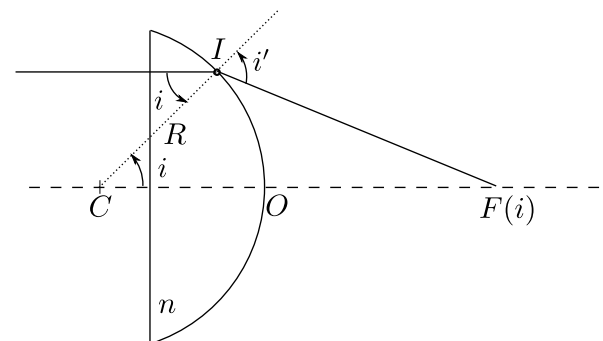


FIGURE 3.4 – Aberrations géométriques

Sachant qu'ici, puisqu'on accole la seconde lentille à la première, on a nécessairement $R'_1 = R_2$, on peut calculer le rayon de courbure de la face de sortie de la seconde lentille :

$$\frac{1}{R'_2} = \frac{1}{R_2} - K_2 = \frac{1}{R'_1} - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \frac{n_1^r - n_2^r}{n_1^b - n_2^b}.$$

On trouve finalement $R'_2 = -90,4$ cm. La seconde lentille est donc bien une lentille divergente ($K_2 < 0$), et la focale du doublet est finalement $f_r = f_b = 91,5$ cm. Pour corriger les aberrations géométriques, il a donc fallu perdre en convergence : la focale du doublet est plus grande que celle de la lentille non corrigée.

3. Aberrations géométriques

3.1 On utilise une nouvelle fois la relation des sinus, dans le triangle $CIF(i)$ (voir figure 3.4), qui nous permet d'écrire

$$\frac{\sin(i' - i)}{R} = \frac{\sin(\pi - i')}{CF(i)} = \frac{\sin i'}{CF(i)} = \frac{n \sin i}{CF(i)}.$$

En outre,

$$\sin(i' - i) = \sin i' \cos i - \sin i \cos i' = \sin i \left(n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i} \right).$$

On a donc

$$CF(i) = \frac{nR}{n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}.$$

3.2 D'après l'équation précédente, la position du point F sur l'axe dépend donc de l'angle d'incidence i . Le dioptre sphérique n'est pas stigmatique.

Pour être plus précis, en notant $g(i) = n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}$, on calcule

$$g'(i) = n \sin i \left(\frac{n \cos i}{\underbrace{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}_u} - 1 \right).$$

On remarque alors que

$$u^2 = \frac{n^2 \cos^2 i}{1 - n^2 \sin^2 i} = \frac{n^2 \cos^2 i}{n^2 \cos^2 i + \underbrace{1 - n^2}_{<0}} > 1,$$

car $n > 1$. On trouve donc $g'(i) > 0$: $g(i)$ est une fonction croissante de i . La longueur $CF(i)$ est donc une fonction décroissante de i . Autrement dit, plus le rayon lumineux est hors de l'axe, *i.e.* plus i est grand, plus il intercepte l'axe optique près de la lentille en sortie de celle-ci.

Les rayons lumineux se concentrent sur l'axe entre les points $F(i = 0)$ et $F(i = i_{\max})$, où i_{\max} est défini par $n \sin i_{\max} = 1$. Les rayons se concentrent ainsi sur la longueur $\delta = CF(i_{\max}) - CF(0)$ donnée par

$$\delta = \frac{nR}{n-1} \left(1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \right).$$

Si l'on trace enfin la trajectoire des rayons lumineux en sortie de la lentille (figure 3.5), on constate qu'ils se concentrent non seulement sur l'axe optique, pour former la *nappe sagittale*, mais également en une surface hors de l'axe optique, qui pointe en $F(i_{\max})$, appelée *nappe tangentielle*.

3.3 Si l'on ne considère que des rayons proches de l'axe optique, *i.e.* qu'on se place dans les conditions de Gauss, on se place dans la situation où $i \ll 1$. En faisant le développement limité de $CF(i)$, on trouve alors que

$$CF(i) \underset{i \rightarrow 0}{\sim} \frac{nR}{n-1} \left(1 - \frac{n i^2}{2} \right) + O(i^4).$$

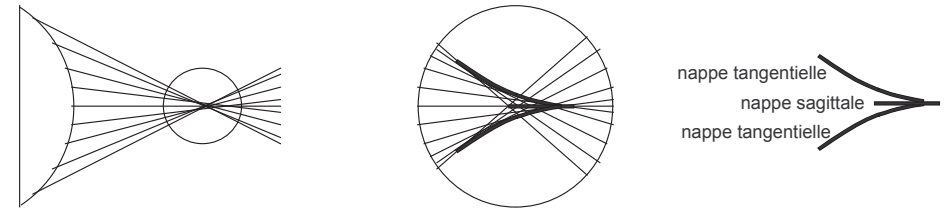


FIGURE 3.5 – Nappes tangentielle et sagittale

Au premier ordre en i , $CF(i)$ ne dépend donc plus de i : le dispositif est à nouveau stigmatique. En particulier, on constate alors que

$$\frac{1}{OF(i)} = \frac{1}{CF(i) - R} = \frac{n-1}{R} = (n-1) \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-R} \right).$$

On retrouve bien l'expression obtenue précédemment pour la focale de la lentille dans les conditions de Gauss.

EXERCICE IV PROPAGATION DANS UN MILIEU D'INDICE CONTINUËMENT VARIABLE

1. Le principe de Fermat stipule que le trajet suivi par la lumière est celui pour lequel le chemin optique \mathcal{D} est extrémal (le plus souvent minimal), avec

$$\mathcal{D} = \int n(s) ds,$$

où $n = \frac{c}{v_\varphi}$ (rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et de la vitesse de phase dans le milieu) est l'indice optique local, et $ds = v_\varphi dt$ l'abscisse curviligne élémentaire (la lumière «suit» le chemin le plus rapide).

En mécanique, le principe de Maupertuis, ou principe de moindre action, précise qu'un système mécanique évolue dans le temps de sorte que l'action \mathcal{S} soit extrémale, avec

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(t) dt,$$

où \mathcal{L} est le lagrangien du système. Si l'on note q_i ($i = 1, \dots, n$) les degrés de liberté du système, et \dot{q}_i leurs dérivées temporelles, les équations de Lagrange qui déterminent son évolution sont

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

2. Pour retrouver l'analogie entre le principe de Maupertuis et le principe de Fermat, on écrit

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dz \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

où l'on a posé $\dot{x} = dx/dz$ et $\dot{y} = dy/dz$. Le chemin suivi par la lumière est donc celui qui minimise

$$\mathcal{D} = \int n(x, y, z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2} dz,$$

où l'on a artificiellement distingué la dépendance en z de n . En considérant la position z comme une variable effective de temps, le principe de Maupertuis se rapporte au principe de Lagrange en écrivant le lagrangien optique

$$\mathcal{L}_{\text{opt}} = n(x, y, z) \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

La trajectoire des rayons lumineux est alors donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{opt}}}{\partial q_i} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{opt}}}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

soit

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{d}{dz} \left(n(x, y, z) \frac{dx}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right),$$

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right).$$

On trouve de même, puisque z ne joue aucun rôle particulier,

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right).$$

Ces trois équations peuvent finalement se mettre sous la forme

$$\boxed{\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \vec{\nabla} n},$$

où $\vec{u} = d\vec{r}/ds$ est le vecteur tangent aux rayons lumineux.

EXERCICE V FIBRES OPTIQUES (AGREG A 2007)

e- Application : la fibre optique à saut d'indice.

α) Il faut pouvoir observer un phénomène de réflexion totale sur la gaine, donc $n_1 > n_2$
β) $i_1 - \alpha = \pi/2$: pour qu'il y ait réflexion totale, il faut que

$\sin i_1 > \frac{n_2}{n_1}$, donc $\cos \alpha > \frac{n_2}{n_1}$. Or $\sin \theta$

$= n_1 \sin \alpha$. Il vient donc : $\theta < \theta_{\text{max}}$,

avec $\sin \theta_{\text{max}} = n_1 \sin(\arccos \frac{n_2}{n_1}) = n_1$

$$\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}} = n_1 \sqrt{2\Delta}.$$

D'où O.N. = $n_1 \sqrt{2\Delta} = 0,21$

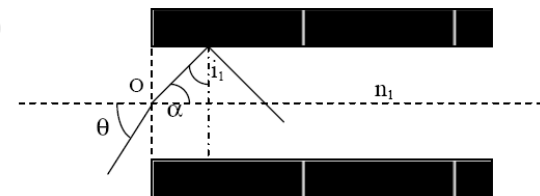
γ) Si on courbe la fibre, l'angle d'incidence est modifié, et par suite i_1 qui peut devenir inférieur à $\arcsin \frac{n_2}{n_1}$. Il y aura alors réfraction, et donc perte énergétique.

δ) Le trajet le plus rapide est celui correspondant à l'incidence nulle : $t_{\text{min}} = n_1 L/c$. Le trajet le plus long est celui correspondant à l'angle d'incidence θ_i . Ce rayon fera

$$\frac{L \tan \alpha_i}{r_1} \text{ trajets de type OA (cf figure ci-dessus) qui prennent chacun le temps}$$

$$n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i}. \text{ D'où } t_{\text{max}} = \frac{L \tan \alpha_i}{r_1} n_1 \frac{r_1}{c \sin \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \cos \alpha_i} = \frac{n_1 L}{c \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}}$$

$$\text{D'où } \Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n_1^2}}} - 1 \right) = 0,22 \text{ ns.}$$



I-5- Extension à un milieu non homogène : loi fondamentale de l'optique géométrique.

a- la concavité du rayon est toujours tournée dans le sens de $\overline{\text{grad}n}$.

Exemple 1 : Dans une cuve, avec un mélange d'eau et de sel qu'on a laissé reposer, la concentration, donc l'indice, croissent de la surface au fond. $\overline{\text{grad}n}$ est donc dirigé verticalement vers le fond de la cuve. Un rayon arrivant normalement dans la cuve s'incurvera alors vers le bas.

Exemple 2 : Phénomène de mirage : lorsque le sol est très chaud, l'indice croît avec l'altitude z . Les rayons provenant d'un objet s'incurvent en semblant provenir du sol comme s'ils avaient subi une réflexion sur une surface réfléchissante comme de l'eau.

b- Application : la fibre optique à gradient d'indice.

$$\alpha) \frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overline{\text{grad}n} = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r. \text{ Il vient donc } \frac{d}{ds} (n(r)\cos\alpha(r)\vec{u}_z + n(r)\sin\alpha(r)\vec{u}_r) = \frac{dn}{dr} \vec{u}_r,$$

Par identification, on obtient $n \cos\alpha = \text{cste} = n_1 \cos\theta_0$, soit $\cos^2\alpha = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \cos^2\theta_0$.

Or $\left(\frac{dr}{dz}\right)^2 = \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{n^2}{n_1^2 \cos^2\theta_0} - 1 = \frac{1 - 2\Delta\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}{\cos^2\theta_0} - 1$. Si on dérive cette

expression, on obtient : $\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{2\Delta}{r_1^2 \cos^2\theta_0} r$

Soit $r = A \cos\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos\theta_0} z\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos\theta_0} z\right)$. Compte tenu des conditions en $z=0$

qui s'écrivent $r(z=0) = 0$ et $\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=0} = \tan\theta_0$, on obtient finalement :

$$r = \frac{r_1 \sin\theta_0}{\sqrt{2\Delta}} \sin\left(\frac{\sqrt{2\Delta}}{r_1 \cos\theta_0} z\right). \text{ La trajectoire est donc sinusoïdale, de période spatiale}$$

$$2d = 2 \frac{\pi r_1 \cos\theta_0}{\sqrt{2\Delta}}, \text{ d'où } d = \frac{\pi r_1 \cos\theta_0}{\sqrt{2\Delta}}.$$

$\beta)$ Il faut que $r_{\max} < r_1$, soit $\sin\alpha_0 < \sqrt{2\Delta}$, soit finalement $\sin\alpha < n_1 \sqrt{2\Delta} = \text{O.N.}$ On retrouve donc la même valeur que dans la fibre à saut d'indice : l'intérêt d'une fibre à gradient d'indice ne réside donc pas dans l'ON.

$\gamma)$ $\Delta t = 0,46 \cdot 10^{-12} \text{s} \ll \Delta t$: l'élargissement est beaucoup plus faible que dans une fibre à saut d'indice, d'où l'intérêt des fibres à gradient d'indice (qui ne réside pas dans l'O.N) pour le transport d'information avec des hauts débits.

$\delta)$ Fibroscopie, endoscopie, communication, réseau câblé...