

Corrigé

Diffraction (1)



EXERCICE I DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

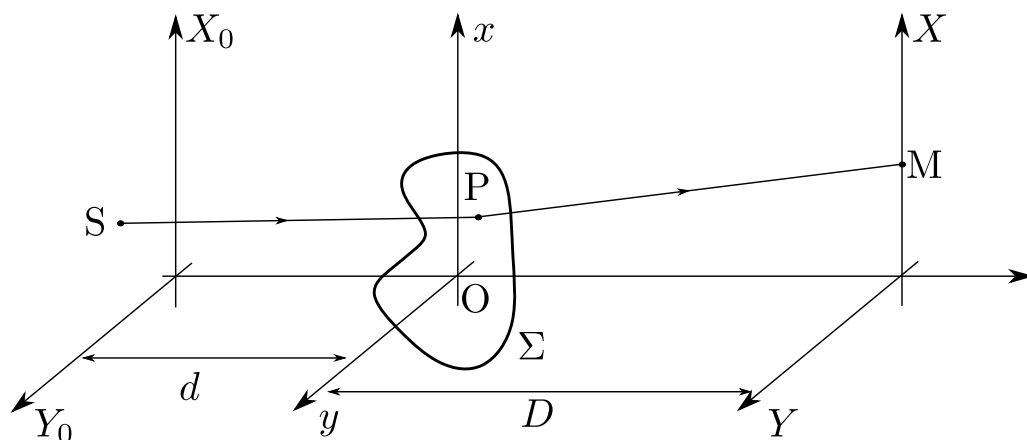


FIGURE 1.1 – Géométrie considérée

1. Principe de Huygens-Fresnel : (Cf. BFR)

Enoncé du principe

Chaque point M d'une surface Σ atteinte par la lumière peut être considérée comme une source secondaire émettant une onde sphérique. L'état vibratoire de cette source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente en M et à l'élément de surface $d\Sigma$ entourant le point M .

Les vibrations issues des différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

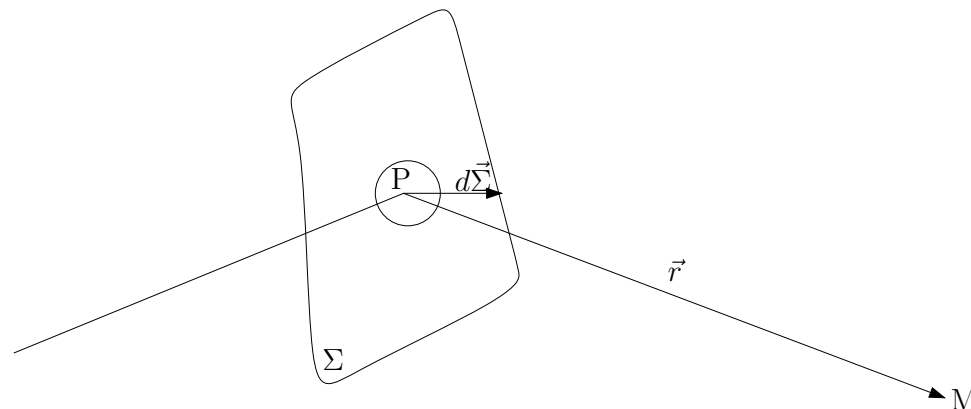


FIGURE 1.2 – Principe de Huygens-Fresnel.

Soit P un point de la surface Σ éclairée et M un point de l'espace (point d'observation), on note θ l'angle entre les directions $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ et $d\vec{\Sigma}$ le vecteur normal à Σ en P . Alors

$$ds(M) = A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma \longrightarrow s(M) = \int_{\Sigma} A(\theta) t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma, \quad (I.1)$$

où $k = 2\pi/\lambda$ et λ est la longueur d'onde de la source. On a ici sommé les amplitudes complexes car les différentes sources secondaires interfèrent entre elles.

Le facteur $A(\theta)/A(0)$, appelé *facteur d'obliquité* ou *d'inclinaison*, permet de tenir compte de l'anisotropie du diagramme d'émission des sources secondaires et de l'absence de diffraction vers l'arrière [$A(\pi) = 0$]. On écrit $A(\theta) = A(1 + \cos \theta)/2$. En pratique, on considère des rayons faiblement inclinés sur l'axe optique, auquel cas $A(\theta) \approx A(0) \equiv A$, soit

$$s(M) = A \int_{\Sigma} t(x, y) s_0(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} d\Sigma. \quad (I.2)$$

Remarque Le principe de Huygens-Fresnel peut en fait (ou évidemment) être dérivé des équations de Maxwell. La théorie de Kirchhoff permet de formuler des équations sur les solutions d'une équation d'onde scalaire, notamment le théorème intégral de Kirchhoff et Helmholtz. En supposant de surcroît toutes les distances caractéristiques

grandes devant la longueur d'onde, et en se limitant à la diffraction à grande distance, on obtient la formule dite de Fresnel-Kirchhoff de la diffraction, qui n'est rien d'autre que l'équation (I.1), à ceci prêt que l'expression de $A(\theta)$ y est explicite. [Voir par exemple Born & Wolf ou fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_de_Kirchhoff].

2. On applique le principe de Huygens-Fresnel au cas considéré [surface Σ de transmittance $t(x, y)$]. Soit M un point d'observation de coordonnées X, Y , et P un point courant de Σ de coordonnées x, y . Alors

$$s(M) = A \int_{\Sigma} s_0(P)t(x, y) \frac{e^{ikPM}}{PM} dx dy.$$

$$\text{Or } \vec{PM} = \begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \\ D \end{pmatrix} \text{ et } PM^2 = D^2 \left[1 + \left(\frac{x-X}{D}\right)^2 + \left(\frac{y-Y}{D}\right)^2 \right], \text{ soit}$$

$$PM = D \sqrt{1 + \left(\frac{x}{D}\right)^2 + \left(\frac{X}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \left(\frac{Y}{D}\right)^2 - 2\frac{xX+yY}{D^2}}.$$

On se place maintenant dans la situation où

$$x, y \ll D, d \quad \text{pupille petite,} \quad (I.3)$$

$$X, Y \ll D \quad \text{petits angles.} \quad (I.4)$$

On retrouve ici les conditions de Gauss. La première condition traduit le fait qu'on ne s'intéresse qu'à la diffraction par de petits objets ou, ce qui est équivalent, qu'il n'y a de la lumière que proche de l'axe optique. La seconde condition impose que les rayons considérés soient tous faiblement inclinés sur l'axe. On introduit pour cela les angles

directeurs de \vec{OM} , notés $\alpha = \frac{X}{D}$ et $\beta = \frac{Y}{D}$, i.e. $\vec{OM} = D \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$. La condition (I.4) se

réécrit alors

$$\alpha, \beta \ll 1. \quad (I.5)$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} PM &\approx D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{D}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X}{D}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{D}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{D}\right)^2 - \frac{xX+yY}{D^2} \right] \\ &= D \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{r^2}{2D^2} - \frac{\alpha x + \beta y}{D} \right), \end{aligned} \quad (I.6)$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 = OP^2$.

On peut alors faire l'approximation $PM \approx D$ dans la norme $s_0(P)/PM$ dans (I.2) : la norme ne varie significativement que si les variations de PM sont de l'ordre de D . En revanche, **pour évaluer la phase $\Phi = kPM$, il faut tenir compte des variations de PM à l'échelle de la longueur d'onde, λ** , et l'on garde donc les ordres plus élevés du développement :

$$\Phi/k = D - (\alpha x + \beta y) + \frac{D}{2} (\alpha^2 + \beta^2) + \frac{r^2}{2D}. \quad (I.7)$$

Finalement, l'onde émise par le point P est, au point M , $s_P(M) \approx e^{i\Phi}/D$. On trouve de même $s_0(P) = s_0 e^{i\Phi_0}/d$, où

$$\Phi_0/k = d + (\alpha_0 x + \beta_0 y) + \frac{d}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{r^2}{2d}, \quad (I.8)$$

avec $\alpha_0 = -\frac{X_0}{d}$ et $\beta_0 = -\frac{Y_0}{d}$ les angles directeurs de \vec{SO} , supposés faibles ($\alpha_0, \beta_0 \ll 1$), et (X_0, Y_0) les coordonnées du point source S . Si S est sur l'axe optique, $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

L'onde diffractée s'écrit alors

$$s(M) = A s_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y] + ik\frac{r^2}{2}(\frac{1}{d} + \frac{1}{D})} dx dy. \quad (I.9)$$

Remarque 1 On a ici omis le terme phase global $\exp[ik(d+D)]$ qui ne joue aucun rôle et qu'on peut donc toujours oublier.

On a aussi introduit la phase

$$\varphi_0 = \frac{kd}{2} (\alpha_0^2 + \beta_0^2) + \frac{kD}{2} (\alpha^2 + \beta^2) = k \frac{X_0^2 + Y_0^2}{2d} + k \frac{X^2 + Y^2}{2D}, \quad (I.10)$$

qui ne dépend que des positions de la source et du plan d'observation, et donc pas, en particulier, de l'objet diffractant. Comme on ne s'intéresse en général qu'à la figure de diffraction, c'est-à-dire à l'intensité lumineuse en M , $|s(M)|^2$, on «oublie» la plupart du temps cette phase φ_0 et surtout sa dépendance en M . Notons au passage que ces termes de phase correspondent à la phase accumulée par une onde sphérique pour aller de la source S au point O ($\exp[ik(X_0^2 + Y_0^2)/2d]$, onde sphérique de rayon de courbure d) et par une onde sphérique pour aller du point O au point M ($\exp[ik(X^2 + Y^2)/2D]$, onde sphérique de rayon de courbure D).

On écrit donc par la suite $\tilde{s}_0 = \frac{A s_0}{dD} e^{i\varphi_0}$ en omettant le fait que sa phase, stricto sensu, dépend du point d'observation M . On verra plus loin (voir exercice III) qu'il est en fait possible de supprimer cette dépendance en M .

Remarque 2 On n'a jusqu'ici pas précisé à quelle grandeur physique l'ébranlement s correspond. En particulier, on ne précise pas son unité. On pourrait ajouter partout un coefficient γ qui viendrait assurer l'adimensionnalité de s , par exemple en écrivant pour une onde sphérique $s_0(\mathbf{P}) = \gamma s_0 e^{ikr}/r$: γ a la dimension d'une longueur. En pratique, on ne calculera les figures qu'à un facteur multiplicatif près, commun à toutes les figures. On « cachera » donc par la suite le problème dans le coefficient s_0 , proportionnel à l'amplitude de l'onde émise par la source.

3. La **diffraction de Fraunhofer** correspond au cas où la phase quadratique dans (I.9),

$$\Phi_Q = \frac{kr^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right), \quad (\text{I.11})$$

proportionnelle à r^2 , peut être négligée. L'onde diffractée s'écrit dans ce cas

$$s(\mathbf{M}) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} dx dy. \quad (\text{I.12})$$

On distingue trois cas important où la condition de Fraunhofer est réalisée :

— Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à l'infini ($1/D = 0$). Dans ce cas, l'onde incidente est repérée par son vecteur d'onde \vec{k}_0 et la direction d'observation par le vecteur d'onde \vec{k} , avec

$$\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

L'onde diffractée $s(\mathbf{M})$ prend alors la forme

$$s(\mathbf{M}) = \tilde{s}_0 \int_{\Sigma} t(\mathbf{P}) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma. \quad (\text{I.13})$$

— Diffraction d'une onde plane ($1/d = 0$) à grande distance ($1/D \approx 0$). On retrouve la formule précédente dans le cas où

$$kr^2 \ll 2D \Leftrightarrow D \gg \frac{r^2}{2\lambda}.$$

Cette condition n'est en pratique pas très restrictive. Par exemple, pour un objet de taille $r = 50 \mu\text{m}$, éclairé par une lumière de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{nm}$, il suffit de placer l'écran à $d \gg 2,5 \text{mm}$ pour que la condition soit vérifiée.

— Diffraction au voisinage de l'**image géométrique** de la source. Cette situation correspond à la situation où $1/d \neq 0$, $1/D \neq 0$ mais $(1/d + 1/D) = 0$. En fait, on peut reprendre les calculs précédents en écrivant $d = -D$: la source effective est située sur l'écran d'observation. Voir *Sextant* p.139.

C'est le fait que la diffraction de Fraunhofer corresponde à cette situation qui la rend si importante en pratique !

La *diffraction de Fresnel* correspond à la situation où les termes quadratiques (en r^2) ne sont plus négligeables, tout en omettant les ordres suivants du développement.

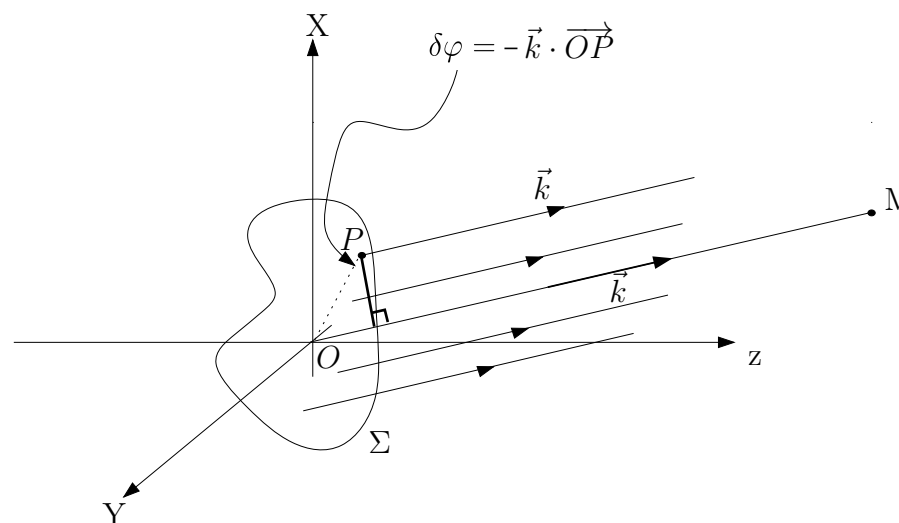


FIGURE 1.3 – Calcul de l'amplitude de la vibration lumineuse dans l'approximation de Fraunhofer. $\delta\varphi$ est le déphasage de l'onde émise en P par rapport à l'onde émise en O.

Remarque 1 La formule de Fraunhofer peut être retrouvée simplement dans le cas de la diffraction d'une onde plane à l'infini. Dans ce cas en effet, L'onde émise par un point P de Σ au point M présente un déphasage $\delta\varphi$ (voir FIG. 3) par rapport à celle émise par le point O égal à

$$\delta\varphi = -\vec{k} \cdot \vec{OP}.$$

De même, l'onde reçue au point P est déphasée par rapport à celle reçue au point O d'une grandeur

$$\delta\varphi_0 = \vec{k}_0 \cdot \vec{OP}.$$

On obtient alors directement

$$s(\mathbf{M}) \propto \int_{\Sigma} t(\mathbf{P}) e^{i[\delta\varphi(\mathbf{P}) + \delta\varphi_0(\mathbf{P})]} d\Sigma = \int_{\Sigma} t(\mathbf{P}) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma.$$

Remarque 2 Base de l'optique de Fourier [Cf. TD Diffraction (2)].

On a une relation de transformée de Fourier entre $t(x, y)$ et le profil d'intensité diffracté dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. On appelle *plan de Fourier* le plan où l'on observe cette figure de diffraction.

Remarque 3 On peut en fait montrer que l'on est dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer quand la taille de la tache de diffraction est grande devant la taille de l'image géométrique (*i.e.* sans diffraction). Voir *Sextant* p.140.

4. *Diffraction par une fente rectangulaire* Dans le plan focal focal de la lentille, éclairée

par une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_0 = k \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} X = f\alpha \\ Y = f\beta \\ D \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} s(\mathbf{M}) &= \tilde{s}_0 \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-a/2}^{+a/2} dx \frac{1}{ab} e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} \\ &= \tilde{s}_0 \frac{1}{ab} \left[-\frac{1}{ik(\alpha - \alpha_0)} \left(-2i \sin \frac{ka(\alpha - \alpha_0)}{2} \right) \right] \left[-\frac{1}{ik(\beta - \beta_0)} \left(-2i \sin \frac{kb(\beta - \beta_0)}{2} \right) \right] \\ &= \tilde{s}_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi a(X - X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi b(Y - Y_0)}{\lambda f} \right), \end{aligned}$$

avec $X_0 = f\alpha_0$ et $Y_0 = f\beta_0$. D'où le profil d'intensité, en notant $I_0 = |\tilde{s}_0|^2$,

$$I(X, Y) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a(X - X_0)}{\lambda f} \right) \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi b(Y - Y_0)}{\lambda f} \right).$$

Pour une fente infiniment fine $b \rightarrow 0$, $I \rightarrow I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a X}{\lambda f} \right)$, de largeur $\frac{2\lambda f}{a}$ (première annulation en $\frac{\lambda f}{a}$) : la figure de diffraction est **perpendiculaire** à la fente diffractante.

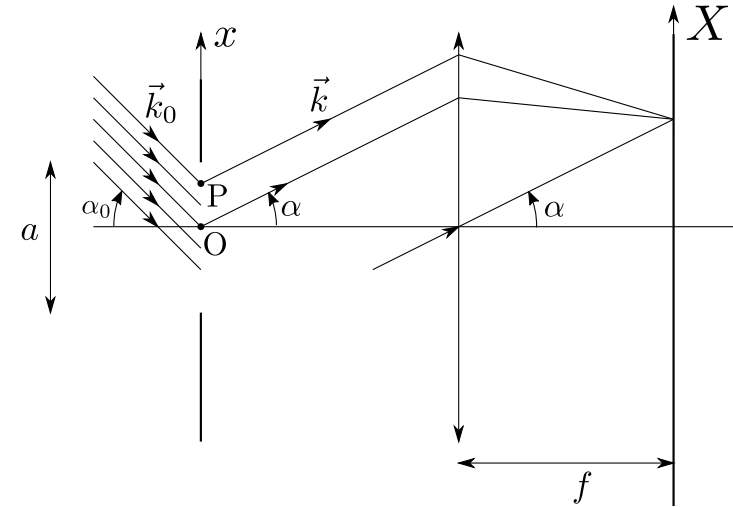


FIGURE 1.4 – Diffraction par une fente rectangulaire.

5. Un trou de rayon a est compris entre une fente carrée de côté $2a$ et une autre de côté $\sqrt{2}a$. Les largeurs des taches de diffraction de ces carrés sont $\frac{\lambda f}{a}$ et $\frac{\sqrt{2}\lambda f}{a}$, respectivement.

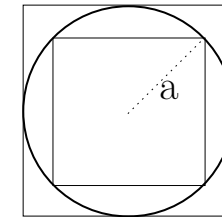


FIGURE 1.5 – Un trou de rayon a est compris entre deux carrés de cotés $2a$ et $\sqrt{2}a$.

La largeur angulaire θ du rayon de la tache de diffraction du trou de rayon a vérifie alors

$$\frac{\lambda}{a} < \theta < \frac{\sqrt{2}\lambda}{a}.$$

Donc $\theta \approx 1, 2\frac{\lambda}{a} \pm 0, 2\frac{\lambda}{a}$. Le calcul complet fait apparaître des fonctions de Bessel et

permet de trouver

$$\theta \approx 1,22 \frac{\lambda}{a}$$

6. Théorème de Babinet.

Soit deux écrans Σ_1 et Σ_2 de transmittance $t_1(x, y)$ et $t_2(x, y)$ complémentaires ($\forall x, y \quad t_1(x, y) + t_2(x, y) = 1$).

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par les deux écrans sont identiques.

DÉMONSTRATION : La vibration en M pour l'écran Σ_1 s'écrit

$$s_{\Sigma_1}(M) = A \int_{\Sigma_1} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy,$$

et de même pour l'écran Σ_2

$$s_{\Sigma_2}(M) = A \int_{\Sigma_2} \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy.$$

En l'absence d'objet diffractant Σ_i , au point M , on ne voit que l'image géométrique de la source. En dehors de l'image géométrique, il n'y a donc pas d'éclairement en l'absence d'objet diffractant :

$$\text{Hors de l'image géométrique : } I = s \cdot s^* = 0 \longrightarrow s = 0.$$

Or, cette situation correspond à $t(x, y) = 1$ en tout point. Comme $t_1 + t_2 = 1$ en tout point, en dehors de l'image géométrique, on en déduit

$$s = A \int \frac{e^{ikPM}}{PM} t_1(x, y) dx dy + A \int \frac{e^{ikPM}}{PM} t_2(x, y) dx dy = s_{\Sigma_1}(M) + s_{\Sigma_2}(M) = 0.$$

Donc $s_{\Sigma_1}(M) = -s_{\Sigma_2}(M)$, soit

$$I_{\Sigma_1}(M) = I_{\Sigma_2}(M) \quad \text{pour } M \text{ en dehors de l'image géométrique}.$$

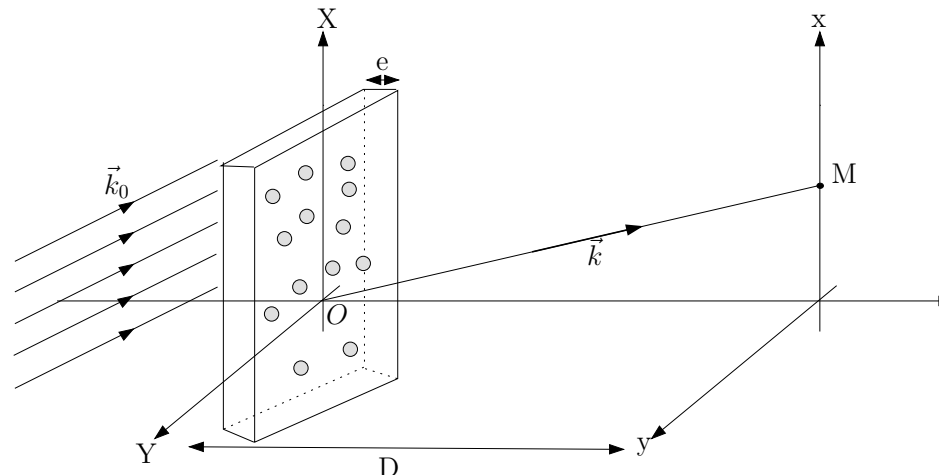


FIGURE 2.1 – Diffraction par un ensemble de structures.

EXERCICE II DIFFRACTION PAR UN ENSEMBLE DE STRUCTURES

1. Cas général

1.1 On applique le principe de Huygens-Fresnel dans l'approximation de Fraunhofer

$$s(M) = A s_0 \int_{\Sigma} t(P) \frac{e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot \vec{OP}}}{PM} dx dy.$$

À chaque élément diffractant $\{j\}$, on associe une transmittance $t_j(P)$ et une position O_j . On a alors

$$t(P) = \sum_j t_j(P).$$

1.2 On note $\vec{R}_j = \vec{OO}_j$, et on décompose

$$\vec{OP} = \vec{OO}_j + \vec{O}_j\vec{P} = \vec{R}_j + \vec{O}_j\vec{P}.$$

Si l'on note $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$, on obtient

$$s(M) = \frac{As_0}{D} \sum_j \left(e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_j} \underbrace{\int_{\Sigma} t_j(P) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{P}_j} d\Sigma}_{\text{indépendant de } j} \right)$$

$$s(M) = s'_0 \underbrace{\left(\sum_j e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \vec{R}_j} \right)}_{\text{Facteur de structure}} \underbrace{\int_{\text{1 structure}} t_0(\delta\vec{r}) e^{-i\Delta\vec{k} \cdot \delta\vec{r}} d\Sigma}_{\text{Facteur de forme}}.$$

La figure de diffraction obtenue est le produit d'un facteur de structure, qui ne dépend que de la répartition des structures sur l'écran diffractant, et d'un facteur de forme, qui ne dépend que de la forme d'une structure unique.

2. Structures réparties de façon aléatoire

On a

$$I \propto |s(M)|^2 = |s'_0|^2 \left| \sum_j e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_j} \right|^2 \underbrace{\left| \int_{\Sigma} t_0(\delta\vec{r}) e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \delta\vec{r}} d\Sigma \right|^2}_{=\mathcal{F}(M) \text{ diffraction d'un seul motif}}.$$

Soit $S = \left| \sum_j e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_j} \right|^2$ le facteur de structure. On a

$$S = \left| \sum_j e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_j} \right|^2 = \sum_{j,l} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_l)}, \quad (\text{II.1})$$

$$= \sum_{j=l} 1 + \sum_{j \neq l} e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_l)},$$

$$= N + \underbrace{\sum_{j \neq l} e^{i\Delta\vec{k} \cdot (\vec{R}_j - \vec{R}_l)}}_{\approx 0 \text{ si } N \text{ grand}}. \quad (\text{II.2})$$

Le deuxième terme dans l'équation précédente s'annule car les structures sont réparties de façon aléatoire sur l'écran diffractant. On a alors

$$I(M) = N \mathcal{F}(M).$$

Si on a N motifs répartis aléatoirement, on obtient la figure de diffraction d'un seul motif mais N fois plus intense qu'avec un motif unique.

Exemple Cette situation est particulièrement utile quand l'on cherche, par exemple, à connaître le rayon moyen des grains d'une poudre. En répartissant de façon aléatoire les grains sur une plaque, la figure de diffraction obtenue pour l'ensemble des grains est la figure de diffraction d'un grain de *diamètre moyen*. En montage, on peut par exemple mesurer le diamètre de spores de lycopode par cette méthode.

Notons qu'on ne gagne, ni ne perd, en intensité par rapport à la situation où l'on éclairerait un seul grain, à intensité lumineuse totale constante. En effet, l'intensité éclairant le grain unique est N fois plus grande que l'intensité éclairant un grain parmi les N répartis de façon aléatoire. Mais comme la figure de diffraction dans ce dernier cas est N fois plus intense que dans le premier cas, les deux figures de diffraction obtenues sont également intenses.

Remarque La situation est différente au centre de la figure de diffraction, *i.e.* pour $\vec{k} = \vec{k}_0$. Dans ce cas en effet, tous les termes de la somme dans l'équation (II.1) sont égaux à 1, et $S = N^2$. Autrement dit, au centre de la figure, l'intensité est proportionnelle à N^2 .

3. Structures périodiques : réseau

Si les motifs sont répartis de manière ordonnée, une relation de phase déterminée est établie entre chacun d'eux et le deuxième terme de la somme (II.2) est non nul.

3.1 On envisage le cas simple du réseau plan. Les positions \vec{R}_j sont alors données par $\vec{R}_j = j\vec{a}$ où \vec{a} est le vecteur caractéristique du réseau. Le facteur de structure s'exprime dès lors

$$S = \left| \sum_j e^{i j \vec{a} \cdot (\vec{k}_0 - \vec{k})} \right|^2 = \left| \sum_j e^{i j k a (\sin \theta_0 - \sin \theta)} \right|^2 = \begin{cases} N^2, & \text{si } k a (\sin \theta_0 - \sin \theta) \equiv 0 [2\pi], \\ \approx 0 & \text{sinon (pour } N \text{ grand)}. \end{cases}$$

On retrouve alors la formule dite des réseaux qui stipule que les interférences entre les ondes émises par les différentes fentes du réseaux sont constructives dans la direction θ quand θ prend l'une des valeurs θ_n définies par

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n \frac{\lambda}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le nombre n est appelé *ordre de diffraction*.

3.2 L'expression exacte de S se calcule facilement en notant que

$$\sum_{j=1}^N e^{-i(\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{2\pi}{\lambda} a j} = \frac{1 - e^{i\varphi N}}{1 - e^{i\varphi}} = e^{i\varphi \frac{(N-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)},$$

où $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta_0 - \sin \theta)$. Ce déphasage correspond au déphasage entre deux rayons issus de deux fentes successives du réseau, *i.e.* à la différence de marche BC + CD sur la figure 2.2.

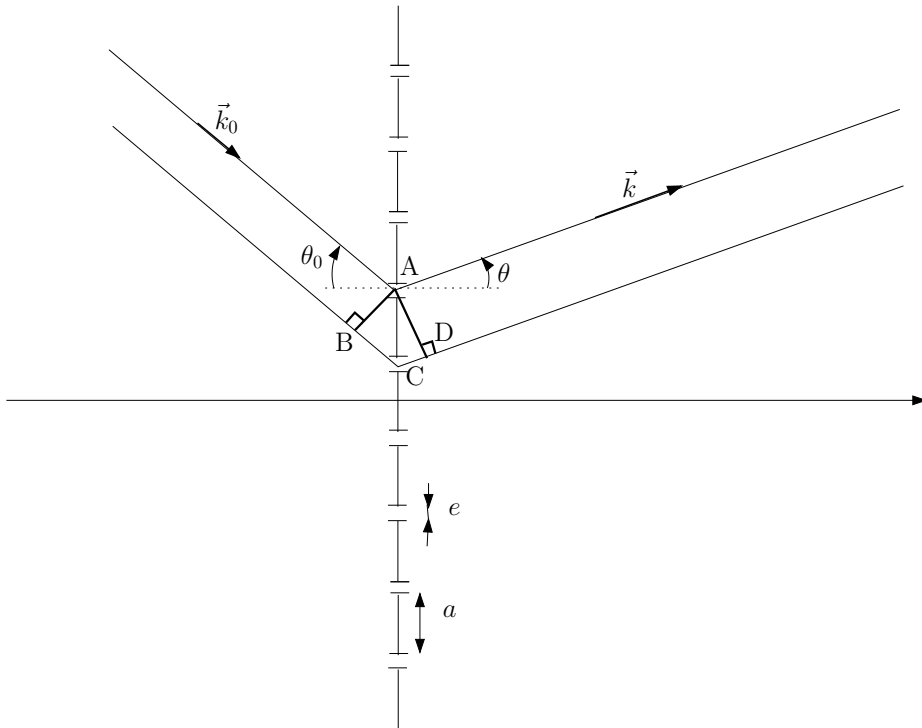


FIGURE 2.2 – Diffraction par un réseau plan.

On a finalement

$$S = N^2 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2}_{\max=1},$$

et

$$I_{\max} \propto N^2,$$

et non N comme dans le cas d'une répartition aléatoire.

Le motif élémentaire est ici une fente, le facteur de forme est donc

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}_0 \operatorname{sinc}^2\left(k (\sin \theta - \sin \theta_0) \frac{e}{2}\right).$$

D'où l'expression complète

$$I = N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\varphi \frac{e}{2a}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right)^2$$

Le facteur de forme s'annule quand $\varphi \frac{e}{2a} = p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$ soit $\varphi = 2p\pi \frac{a}{e}$.

Toutes les longueurs caractéristiques du réseau apparaissent sur la figure :

	Espace réel	Espace réciproque
$L = Na$	dimension la plus grande	dimension de la plus petite petites annulations de la fonction des réseaux BF spatiales
a	dimension intermédiaire distance entre les fentes	directions de sélection ordres du réseau HF spatiales
e	plus petite dimension taille d'une fente	modulation globale THF spatiales

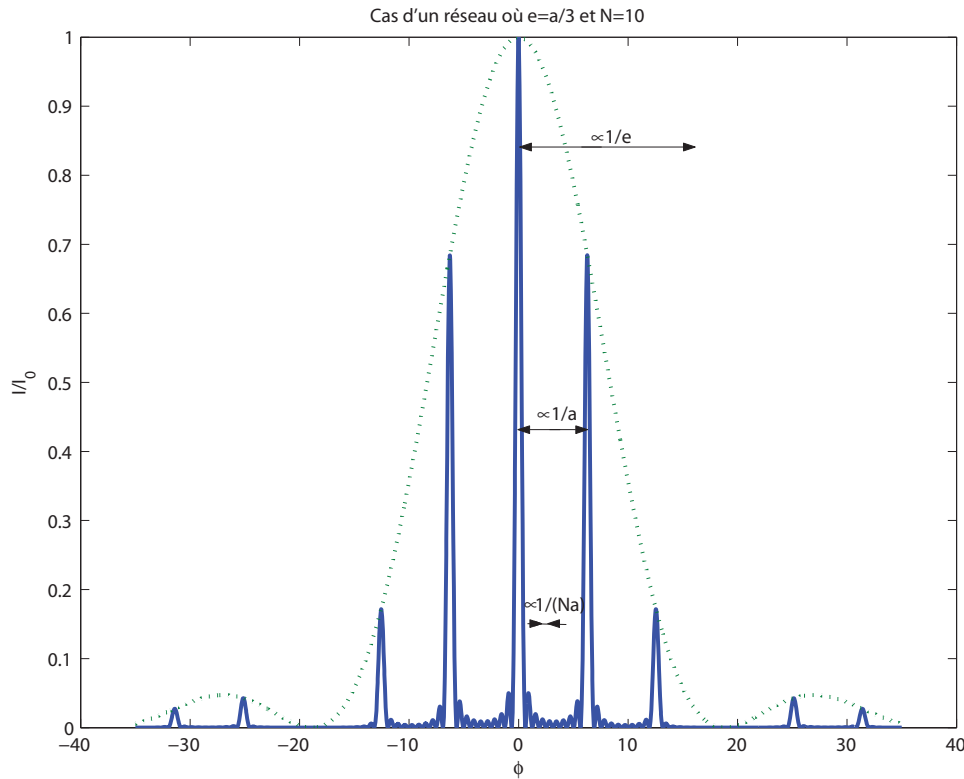


FIGURE 2.3 – Diffraction par un réseau plan, dans le cas où $e = a/3$ et $N = 10$. Les trois dimensions caractéristiques de l'objet diffractant apparaissent sur la figure : e , a et Na . Elles correspondent, respectivement, à des structures sur la figure de diffraction, tracée en fonction de φ , de tailles de l'ordre de a/e , 1 et $1/N$.

Pouvoir dispersif Si l'on note $\theta_m(\lambda)$ la direction du maximum de diffraction d'ordre m , pour la longueur d'onde λ , le pouvoir dispersif du réseau, à l'ordre m , autour de la longueur d'onde λ_0 , est défini comme

$$\gamma_d(\lambda_0, m) = \left. \frac{d\theta_m}{d\lambda} \right|_{\lambda_0}.$$

À partir de la formule des réseaux, on obtient

$$\cos \theta_m \gamma_d(\lambda_0, m) = \frac{m}{a}$$

soit

$$\gamma_d(\lambda_0, m) = \frac{m}{a \cos \theta_m(\lambda_0)}.$$

Si l'on considère des petits angles, on a finalement ($\cos \theta_m \approx 1$)

$$\gamma_d(m) = \frac{m}{a}.$$

On remarque en particulier qu'il n'y a pas de dispersion dans l'ordre 0, et que le pouvoir dispersif est d'autant plus important que l'ordre est important et que a est petit.

On remarque toutefois, d'après l'expression trouvée pour I , que plus l'ordre m est élevé, plus l'intensité du maximum de diffraction est faible, à cause du facteur de forme \mathcal{F} . **En spectroscopie**, il faut donc faire un compromis entre pouvoir de dispersion et intensité. On utilise en pratique des réseaux dit *blazés* qui permettent de déplacer le maximum d'intensité (maximum de \mathcal{F}) sur un ordre de diffraction non nul ($m = 1$ en général). Pensez à les utiliser dans vos montages !

Pouvoir de résolution Le pouvoir de résolution autour d'une longueur d'onde λ est défini comme le rapport de λ sur la plus petite variation $\delta\lambda$ de longueur d'onde que l'on peut résoudre avec le réseau, ou tout autre spectromètre étudié :

$$\gamma_r = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

On considère, par exemple, que deux pics de diffraction, correspondant à deux longueurs d'onde distinctes, sont distinguables quand le maximum de l'un coïncide avec la première annulation de l'autre. Autour de $\varphi = 0$, celle-ci a lieu quand

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \quad \text{soit} \quad \delta\varphi = \frac{2\pi}{N}.$$

Cette condition est en fait la même pour tous les pics de diffraction : la première annulation autour du maximum $\varphi = \varphi_m$ est en $\varphi = \varphi_m \pm \delta\varphi$.

Pour le pic de diffraction d'ordre m , i.e. autour de $\varphi_m = 2\pi m$, le pouvoir de résolution est donc

$$\gamma_r(m) = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\varphi}{\delta\varphi} = mN.$$

Le pouvoir de résolution d'un réseau est d'autant plus important que l'ordre de diffraction est élevé, ou que le nombre de figures diffractantes éclairées est important.

Réseau et Fabry-Pérot Le réseau et le Fabry-Pérot sont tous deux des interféromètres à ondes multiples. Leurs propriétés sont en fait très similaires. D'après les résultats précédents, pour le réseau, la largeur d'un pic de diffraction correspond à

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{N} = \frac{\Delta\varphi}{N},$$

où $\Delta\varphi = 2\pi$ est l'écart entre deux maxima principaux de diffraction. Or, pour le Fabry-Pérot, le rapport de la distance entre deux pics d'interférence ($\Delta\varphi$) et la largeur d'un pic d'interférence ($\delta\varphi$) est donné par la *finesse* du Fabry-Pérot : $\mathcal{F} = \Delta\varphi/\delta\varphi$. Le réseau à N fentes est donc l'équivalent d'un interféromètre de Fabry-Pérot de finesse $\mathcal{F} = N$.

On constate également cette analogie en notant que le pouvoir de résolution du réseau est donné par

$$\gamma_r = mN,$$

où m est l'ordre du pic de diffraction considéré. Pour le Fabry-Pérot, le pouvoir de résolution est donné par

$$\gamma_d = p\mathcal{F} = Q,$$

où p est l'ordre d'interférence et Q le facteur de qualité de l'interféromètre. On retrouve donc et l'on précise l'analogie précédente :

Un réseau à N fentes, à l'ordre m de diffraction, est l'équivalent d'un Fabry-Pérot de finesse $\mathcal{F} = N$, utilisé dans l'ordre d'interférence $p = m$, *i.e.* de facteur de qualité $Q = mN$.

EXERCICE III DIFFRACTION ET LENTILLES

1. Lentille de Fresnel

1.1 Il y a plusieurs façons de montrer l'expression demandée pour la fonction de transmission t_f d'une lentille mince. Une façon simple est de considérer son action sur une onde plane (voir figure 1.a). En sortie de la lentille, l'onde est une onde sphérique qui converge au foyer objet de la lentille, situé à une distance f , la focale, de la lentille. La fonction de transmission de la lentille est donc la fonction qui transforme un plan d'onde en une onde sphérique de rayon de courbure f .

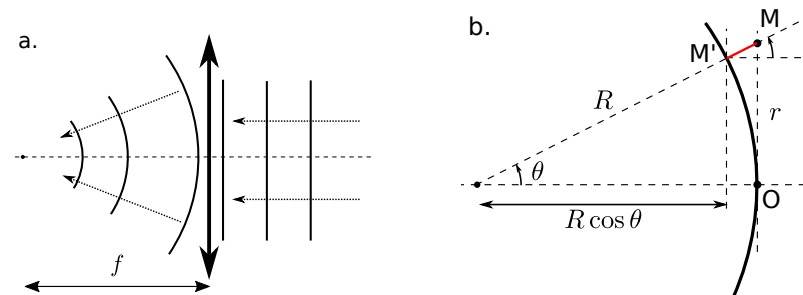


FIGURE 3.1 – a. Transformation d'une onde plane en onde sphérique par une lentille mince de focale f . En amont de la lentille, les surfaces d'onde sont des plans. Après la lentille, les surfaces d'onde sont ces sphères centrées à f de la lentille. b. Estimation du déphasage entre les deux points O et M pour une onde sphérique de rayon de courbure R . Le point M est à une distance r de l'axe optique.

Il suffit alors, pour calculer $t_f(r)$, d'estimer le déphasage entre un point M situé à une distance r de l'axe optique et le point O , intersection de la surface d'onde sphérique de rayon $R = f$ et de l'axe optique (voir figure 1.b). Avant la lentille, l'onde est une onde plane et les points O et M sont en phase. Après la lentille, ce sont les points O et M' qui sont en phase, le point M étant en avance sur O et M' . Le déphasage $\delta\varphi(r)$ recherché correspond donc au chemin optique MM' . Il vaut

$$\delta\varphi(r) = -kMM' = -kR \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \approx -kR \frac{\theta^2}{2} \approx -\frac{kr^2}{2R},$$

$$\text{et donc } t_f(r) = \exp[i\delta\varphi(r)] = \exp\left(-i\frac{kr^2}{2f}\right). \quad (\text{III.1})$$

1.2 On reprend maintenant l'équation (I.9). La fonction de transmission à considérer est le produit de la fonction de transmission t de l'objet diffractant et de celle t_f de la lentille. Autrement dit, à une distance D de l'association objet-lentille, l'onde s'exprime comme

$$s(M) = As_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik\frac{r^2}{2f}} e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x+(\beta-\beta_0)y]+ik\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{D}\right)} dx dy.$$

Le résultat est alors immédiat : pour observer la figure de diffraction de Fraunhofer

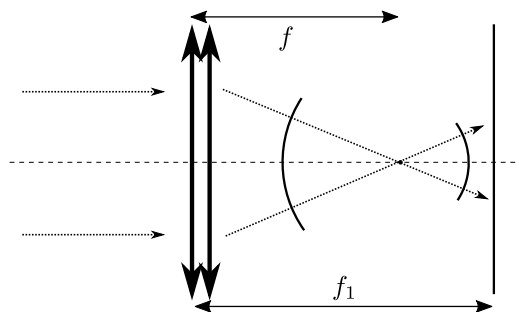


FIGURE 3.2 – Action d'un doublet de lentilles de focales f_1 et f_2 sur une onde plane. L'écran d'observation est à f_1 du doublet.

de t sur l'écran, il faut que

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} - \frac{1}{f} = 0. \quad (\text{III.2})$$

Cette équation n'est rien d'autre que la relation de conjugaison entre la source, située à d de la lentille, et l'écran, situé à D de la lentille. On retrouve bien le fait que la diffraction de Fraunhofer s'obtient dans le cadre de la formation des images.

On retrouve notamment (évidemment) que si la source est à l'infini, alors l'écran doit être placé dans le plan focal image de la lentille ($D = f$).

2. Doublet de lentilles

2.1 On considère ici un doublet formé de deux lentilles minces, de focales f_1 et f_2 . On sait que ce doublet se comporte comme une lentille mince effective, de focale $f = (1/f_1 + 1/f_2)^{-1}$. En sortie du doublet, on obtient donc une onde sphérique qui converge au point de l'axe optique situé à f du doublet. Sur l'écran, à f_1 du doublet, on observe une onde sphérique de rayon de courbure $f_1 - f$, soit

$$s(r) = s'_0 \exp\left[i\frac{kr^2}{2(f_1 - f)}\right] = s'_0 \exp\left[i\frac{kr^2}{2}\frac{f_1 + f_2}{f_1^2}\right]. \quad (\text{III.3})$$

2.2 D'après les résultats de la partie précédente, puisque l'écran d'observation est dans le plan focal de la lentille de focale f_1 , on sait que l'on y observe la figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet diffractant qu'est la lentille de focale f_2 . On

peut ainsi écrire

$$s(r) = A s_0 \frac{e^{i\varphi_0}}{dD} \int_{\Sigma} e^{-ik\frac{r^2}{2f_2}} e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy. \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients α_0 et β_0 sont nuls car on considère une onde plane sur l'axe optique.

L'intégrale dans l'équation (III.4) est identique à celle donnée dans l'énoncé. Il s'agit en fait de la transformée de Fourier de la fonction $t_{f_2}(x, y)$. En notant que $\alpha = X/f_1$ et $\beta = Y/f_1$, et $r^2 = X^2 + Y^2$, on obtient alors directement

$$s(r) \propto e^{i\varphi_0} \exp\left(i\frac{kr^2}{2}\frac{f_2}{f_1^2}\right). \quad (\text{III.5})$$

Si les expressions (III.3) et (III.5) semblent différentes, c'est parce qu'on n'a pas écrit explicitement la dépendance en r de φ_0 dans (III.5). En reprenant l'expression donnée en (I.10), avec $D = f_1$, on retrouve alors bien

$$s(r) \propto \exp\left(i\frac{kr^2}{2f_1}\right) \exp\left(i\frac{kr^2}{2}\frac{f_2}{f_1^2}\right),$$

identique au résultat (III.3).

3. Position de l'objet diffractant

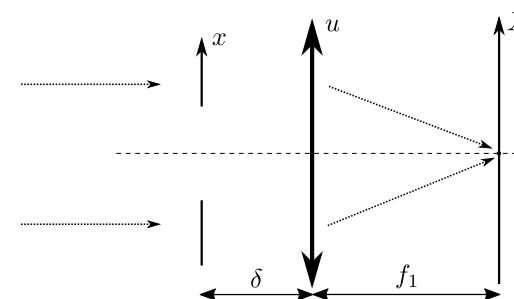


FIGURE 3.3 – L'objet diffractant à une distance δ de la lentille d'observation. L'écran est placé dans le plan focal image.

3.1 Pour obtenir l'amplitude de l'onde dans le plan de la lentille, on peut utiliser les résultats obtenus au premier exercice. Il faut en fait supposer que la distance δ est

grande devant l'étendue de l'objet diffractant ($x \ll \delta$) et grande devant l'étendue de l'onde au niveau de la lentille ($u \ll \delta$), voir figure 3). Cette dernière hypothèse suppose en fait que l'objet diffractant ne « diffracte pas trop », ou autrement dit, que l'étendue de la tache de diffraction au niveau de la lentille reste faible devant δ . Cela suppose en fait que la taille a des motifs élémentaires de l'objet diffractant soit grande devant λ . L'étendue de la tache de diffraction au niveau de la lentille est en effet de l'ordre de $\lambda\delta/a \ll \delta$ si $\lambda \ll a$.

L'amplitude de l'onde sur la lentille s'écrit alors

$$s(u) = \tilde{s}_0 e^{i\varphi_0} \int_{\Sigma} t(x) e^{ik \frac{(x-u)^2}{2\delta}} dx.$$

Cette expression est la même que (I.9) à ceci prêt qu'on n'a pas développé ici la parenthèse $(x-u)^2$, et on a pris $\alpha_0 = 0$. On peut ainsi bien écrire que

$$s(u) = (t \otimes g)(u),$$

c'est-à-dire la convolution de $t(x)$ et de la fonction $g(x)$ donnée dans l'énoncé.

3.2 Puisque l'on place l'écran d'observation dans le plan focal de la lentille d'observation, on est bien dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer. On se retrouve dans le contexte de la première question, avec un objet diffractant effectif dont la fonction de transparence est $t_e(u) = s(u)$, obtenu ci-dessus. Puisque, dans ce cas, il y a un lien de transformée de Fourier entre l'onde diffractée et la fonction de transparence, l'onde sur l'écran est

$$s(X) \propto \text{TF}[t \otimes g](X) = \text{TF}[t](X) \times \text{TF}[g](X) \propto \text{TF}[t](X) \exp\left(-i \frac{k\delta X^2}{2f^2}\right).$$

On voit ainsi que le déplacement δ ne se manifeste que par un terme de phase, correspondant à une onde sphérique de rayon de courbure f^2/δ . Si on ne regarde que l'intensité lumineuse, ce terme de phase ne joue aucun rôle : on retrouve le fait que la position de l'objet diffractant par rapport à la lentille ne modifie pas la figure de diffraction.

Il faut toutefois noter que cela n'est vrai *que* dans le plan focal de la lentille d'observation. Si l'on s'intéresse à la distribution d'intensité de part et d'autre de ce plan, la courbure de phase supplémentaire due à δ n'est plus anodine. Elle peut en effet s'interpréter comme une divergence supplémentaire du front d'onde. Selon la valeur de δ , le front d'onde est donc plus ou moins divergent au niveau du plan

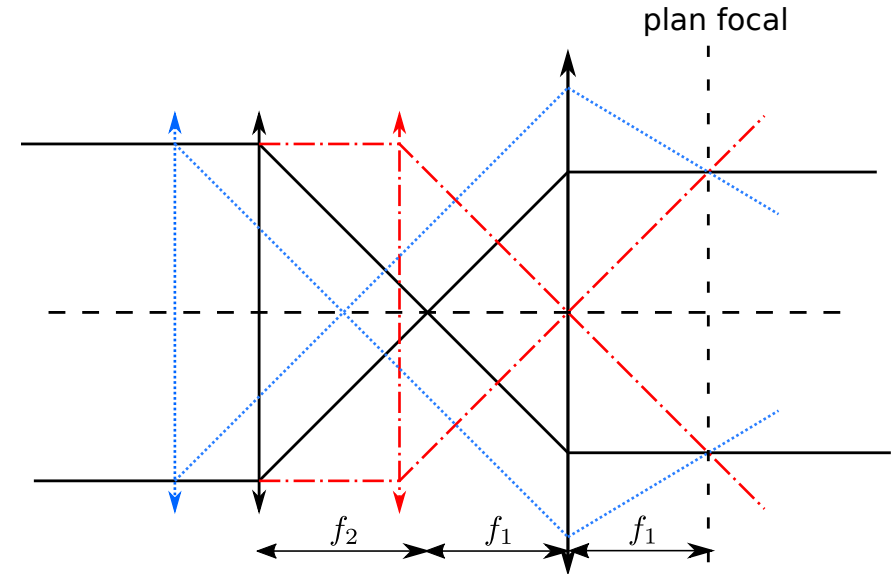


FIGURE 3.4 – Trajectoire d'un faisceau collimaté à travers deux lentilles. Quelle que soit la position de la lentille de focale f_2 , l'étendue du faisceau dans le plan focal de la lentille de focale f_1 est toujours la même.

focal, et la distribution d'intensité plus ou moins étalée juste avant ou juste après ce plan focal.

Le rôle particulier joué par le plan focal de la lentille d'observation peut se comprendre ainsi : *quand on place l'écran dans le plan focal de la lentille placée derrière l'objet diffractant*, la distribution d'intensité sur l'écran ne dépend *que* de la répartition d'énergie entre les vecteurs d'onde de différentes inclinaisons, *i.e.* entre différentes fréquences spatiales. En particulier elle ne dépend pas de l'endroit où les rayons interceptent la lentille. Tous les rayons de même inclinaison sont en effet focalisés au même point du plan focal image, quel que soit leur écart à l'axe optique. Comme la répartition entre les différentes inclinaisons, *i.e.* la façon dont l'objet diffracte la lumière incidente, ne dépend pas de la position de l'objet¹, la figure de diffraction observée sur l'écran ne dépend pas non plus de δ .

Une façon d'illustrer ce phénomène est de considérer la trajectoire, dans le

1. Pour peu que la distance à la source soit maintenue constante ou que, cas plus simple, la source soit à l'infini.

cadre de l'optique géométrique, d'un faisceau collimaté traversant deux lentilles. La première (de focale f_2) joue le rôle de l'objet diffractant, la seconde (de focale f_1) de la lentille d'observation. On constate sur la figure 3b que, quelle que soit la position de la première lentille, l'étendue du faisceau dans le plan focal de la seconde lentille est toujours la même. C'est dû au fait que cette étendue est la traduction directe de l'extension *angulaire*, et non spatiale, des rayons incidents sur la lentille d'observation. Cette extension est toujours la même, quelle que soit la position de la première lentille.

Si l'on observe dans un autre plan que le plan focal, en revanche, non seulement l'inclinaison du rayon mais aussi l'endroit où il intercepte la lentille d'observation déterminent son point d'incidence sur l'écran. Déplacer la première lentille vient précisément modifier le lieu d'intersection avec la lentille et donc, ici, la taille de la tache lumineuse sur l'écran.

Remarque Si l'on reprend l'expression complète de l'amplitude lumineuse sur l'écran, et en n'omettant pas les phases dépendant du point d'observation, on a finalement

$$s(X, Y) = s_0 e^{ik\left(\frac{X^2+Y^2}{2f} - \delta \frac{X^2+Y^2}{2f^2}\right)} \int_{\Sigma} t(x, y) e^{-ik[(\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y]} dx dy.$$

On constate ainsi qu'il existe une position particulière de l'objet diffractant où $s(X, Y)$ est exactement (à s_0 près), la transformée de Fourier de la fonction de transparence $t : \delta = f$. Autrement dit, quand l'on éclaire l'objet diffractant par une onde plane, il faut placer cet objet dans le plan focal objet de la lentille et l'écran dans le plan focal image pour que l'amplitude lumineuse, sur l'écran, soit la transformée de Fourier complexe de t .

En général, et toujours dans le cadre d'expériences pour l'agrégation, on n'a pas de précautions de ce type à prendre en compte dans l'alignement du dispositif optique, puisque l'on ne s'intéresse qu'à l'intensité lumineuse sur l'écran. Ce n'est plus vrai quand la forme du front d'onde, elle-même, importe pour les résultats de l'expérience.