

Corrigé

Diffraction (2) : applications



EXERCICE I RÔLE DE LA DIFFRACTION DANS LA FORMATION DES IMAGES – APODISATION

1. Les étoiles sont à l'infini, elles engendrent donc deux ondes planes au niveau de la pupille. Les deux sources étant **incohérentes** entre elles, on calcule séparément l'éclairement dû à chaque étoile, puis on les somme pour obtenir l'éclairement total.

Calculons l'amplitude diffractée pour une onde plane incidente de vecteur d'onde

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \text{ faible, dans la direction } \vec{k}_d = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha = \frac{x}{f}.$$

Pour la première étoile, $\theta = 0$, l'image géométrique est centrée sur l'axe optique, la figure de diffraction l'est donc aussi, soit (Cf. TD précédent)

$$I_1 = I_1^0 \operatorname{sinc}^2 \left(\pi \frac{ax}{\lambda f} \right).$$

Pour la seconde étoile, l'image géométrique est centrée en $\alpha_{\text{géo}} = \theta$ (sur le dessin, $\theta < 0$), donc

$$I_2 = I_2^0 \operatorname{sinc}^2 \left[\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{x}{f} - \theta \right) \right].$$

Les deux sources sont incohérentes. On a donc l'intensité totale $I = I_1 + I_2$. Chaque étoile apparaît comme une tache de largeur $\delta x = 2 \frac{\lambda f}{a}$. Les deux taches sont séparées de $\Delta x = \theta f$. On obtient finalement

$$\frac{\delta x}{\Delta x} = \frac{2\lambda/a}{\theta}.$$

Si la fente est trop étroite ($a < 2\lambda/\theta$), les taches s'étalent et se confondent. Il devient alors impossible de distinguer les deux étoiles.

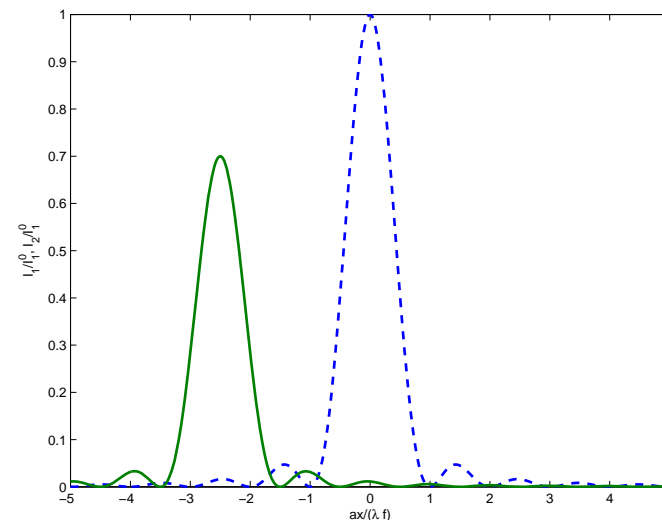


FIGURE 1.1 – Profils d'intensité de chaque étoile, pour $I_2^0 = 0,7 I_1^0$. Le profil observé est la somme des deux profils individuels. La largeur de chaque pic est de $\frac{2\lambda f}{a}$.

Remarque L'étalement dû à la diffraction est un étalement **angulaire** : les étoiles sont distinguables quand elles sont vues sous un angle θ plus grand que l'angle limite $\theta_c = \lambda/a$, angle du cône de cohérence de la fente diffractante (cf. TD 1). Cela veut dire, en particulier, qu'il n'y a rien à gagner sur la résolution en changeant la focale f , i.e. en déplaçant l'écran d'observation. On peut remarquer par exemple que $\delta x/\Delta x$ ne dépend pas de f .

2. Angle limite de résolution du télescope

Limite de résolution : La limite de résolution est atteinte quand le maximum du profil d'intensité de l'étoile 2 est confondu avec la première annulation du profil d'intensité de l'étoile 1. La première annulation du sinus cardinal centré en $x = 0$ a lieu en

$$x = \pm \frac{\lambda}{a} f.$$

L'angle limite θ_l que l'on peut résoudre est donc donné par

$$\frac{\lambda}{a} f = \theta_l f \iff \theta_l = \frac{\lambda}{a}.$$

Le problème est plus subtil si une étoile a une intensité beaucoup plus faible que l'autre. La résolution est alors aussi limitée par les lobes secondaires de l'étoile intense (voir FIG. 1.4).

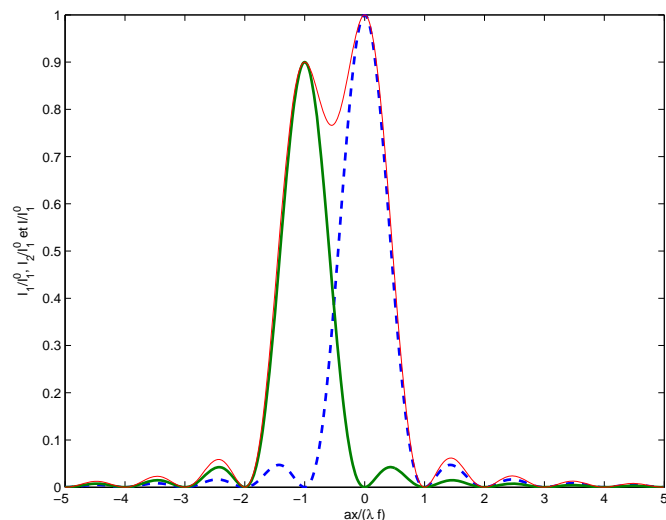


FIGURE 1.2 – Angle limite de résolution du télescope pour des étoiles d'intensités comparables ($I_2^0 = 0,9 I_1^0$). La limite de résolution est atteinte quand le maximum d'un pic correspond à la première annulation de l'autre. La courbe en traits fins représente le profil d'intensité total.

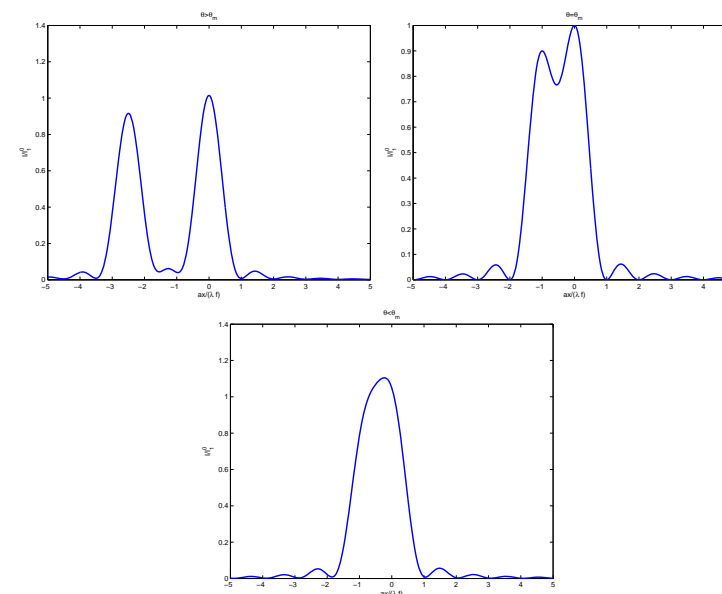


FIGURE 1.3 – Profil d'intensité observé pour des étoiles d'intensités comparables ($I_2^0 = 0,9 I_1^0$) pour $\theta > \theta_l$, $\theta = \theta_l$ et $\theta < \theta_l$.

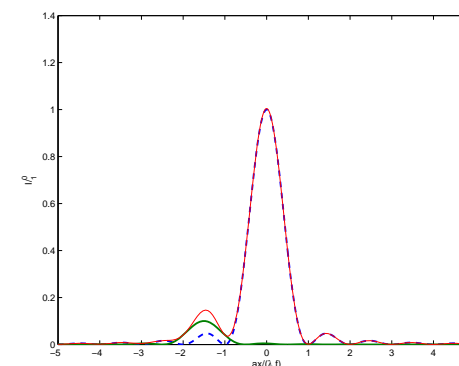


FIGURE 1.4 – Dans le cas où une des deux étoiles est beaucoup moins intense que l'autre ($I_2^0 = 0,1 I_1^0$), même pour $\theta > \theta_l$, les lobes secondaires de la figure de diffraction gênent pour observer l'étoile de faible intensité.

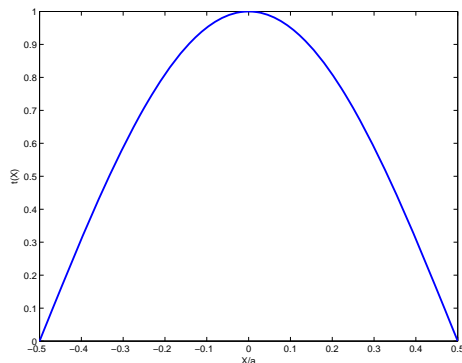


FIGURE 1.5 – Filtre de transparence $t(X) = \cos\left(\frac{\pi X}{a}\right)$.

3. On introduit maintenant un filtre au niveau de la fente. La nouvelle vibration lumineuse diffractée s'écrit

$$s(x, y) = s_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \cos\left(\frac{\pi X}{a}\right) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} dX,$$

avec $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = \frac{x}{f}$ et $(\vec{k} - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \theta)X$, soit

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \frac{s_0}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \left(e^{i\frac{\pi X}{a} \left(1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right)} + e^{i\frac{\pi X}{a} \left(-1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right)} \right) dX \\ &= s_0 \left\{ \frac{a}{\pi \left(1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right)} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{\pi \left(-1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right)} \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(-1 + \frac{2a}{\lambda}(\theta - \alpha)\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Finalement

$$s(x) = \frac{1}{2} s_0 a \left\{ \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda f} \left((x - f\theta) - \frac{\lambda f}{2a} \right) \right] + \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi a}{\lambda f} \left((x - f\theta) + \frac{\lambda f}{2a} \right) \right] \right\},$$

ou encore

$$s(x) = \frac{1}{2} s_0 a \left\{ \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\theta_l} \left(\alpha - \left(\theta + \frac{\theta_l}{2} \right) \right) \right] + \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{\theta_l} \left(\alpha - \left(\theta - \frac{\theta_l}{2} \right) \right) \right] \right\}.$$

On obtient la somme de deux sinus cardinaux, séparés de $f\theta_l = \lambda f/a$, et de largeur $2f\theta_l = 2\lambda f/a$: la première annulation de l'un correspond exactement au maximum de l'autre. En fait, tout maximum de l'un correspond à un minimum de l'autre, les deux systèmes de lobes se compensent donc partiellement. La vibration résultante présente finalement un lobe central plus large, mais les lobes périphériques sont beaucoup plus faibles (voir FIG. 1.6). Quand on diminue ainsi les pieds de la figure de diffraction, on parle d'**apodisation**.

On pose $u = \frac{a(x-f\theta)}{\lambda f} = \frac{\alpha - \theta}{\theta_l}$. On peut alors arranger l'expression de s :

$$s = \frac{s_0 a}{2} \left(\frac{-\cos(\pi u)}{\pi u - \frac{\pi}{2}} + \frac{\cos(\pi u)}{\pi u + \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{s_0 a}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \frac{2 \cos(\pi u)}{\pi^2 u^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{2s_0 a \cos(\pi u)}{\pi (1 - 4u^2)},$$

soit

$$I = \left(\frac{2s_0 a}{\pi} \right)^2 \frac{\cos^2(\pi u)}{(1 - 4u^2)^2}.$$

La figure de diffraction est plus large que celle d'une fente nue. Cependant, si la seconde étoile est beaucoup moins intense, ce type de pupille présente un intérêt. Si $\theta = 5\theta_l/2$ par exemple, la figure de diffraction de l'étoile peu intense est centrée en $\alpha = 5\theta_l/2$, c'est-à-dire juste sur un maximum secondaire de la figure de diffraction de la première étoile, centrée en $\alpha = 0$. Dans le cas où la pupille est la fente nue, le maximum secondaire est suffisamment intense pour masquer complètement la présence de la seconde étoile. Avec le filtre, en revanche, les pieds de la figure de diffraction de l'étoile brillante sont «supprimés», et l'étoile de faible intensité peut ressortir.

Pour conclure :

- Une fente nue a un meilleur pouvoir de résolution car sa figure de diffraction est la plus fine possible. Par ailleurs, c'est ce type d'ouverture qui permet de faire passer le plus de lumière possible, puisqu'elle n'utilise aucun filtre. C'est un bon dispositif pour l'observation de deux étoiles d'intensités comparables ;
- Le filtre apodisant élargit la figure de diffraction mais permet d'aplanir les rebonds présents dus au sinus cardinal. Il permet de faire ressortir les objets de faible intensité, qui auraient été perdus au milieu des lobes latéraux. On perd cependant en résolution et en intensité.

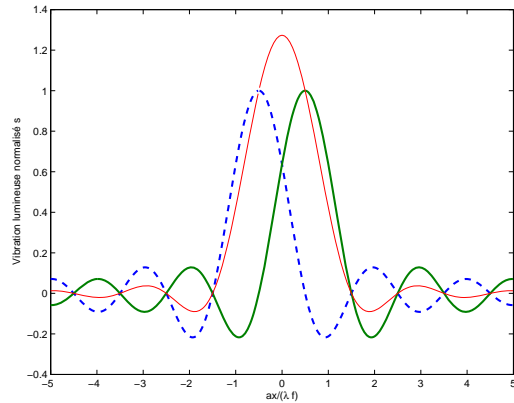


FIGURE 1.6 – Vibration lumineuse issue du filtre d'apodisation. On obtient la somme de deux sinus cardinaux dont les signes des lobes sont opposés (courbes en traits gras) : il en résulte une vibration lumineuse avec des lobes atténués (courbe en trait fin).

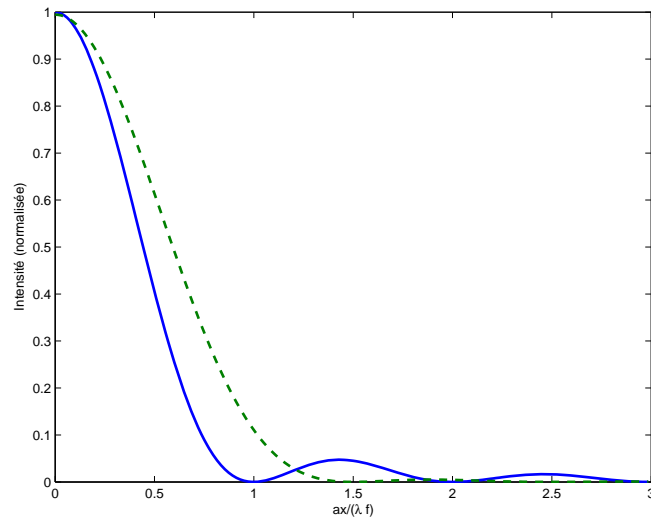


FIGURE 1.7 – Comparaison de la figure de diffraction d'une étoile avec ou sans filtre. Les lobes sont atténués avec le filtre, avec en contre partie une tache centrale plus large.

Remarque Les mêmes concepts entrent en jeu dans le calcul de la transformée de Fourier d'un signal électrique sur les oscilloscopes numériques qui offrent la possibilité d'appliquer une fonction «porte» sur le signal (Cf. TP *Télécommunications*).

EXERCICE II OPTIQUE DE FOURIER

1. Rappel : Diffraction de Fraunhofer.

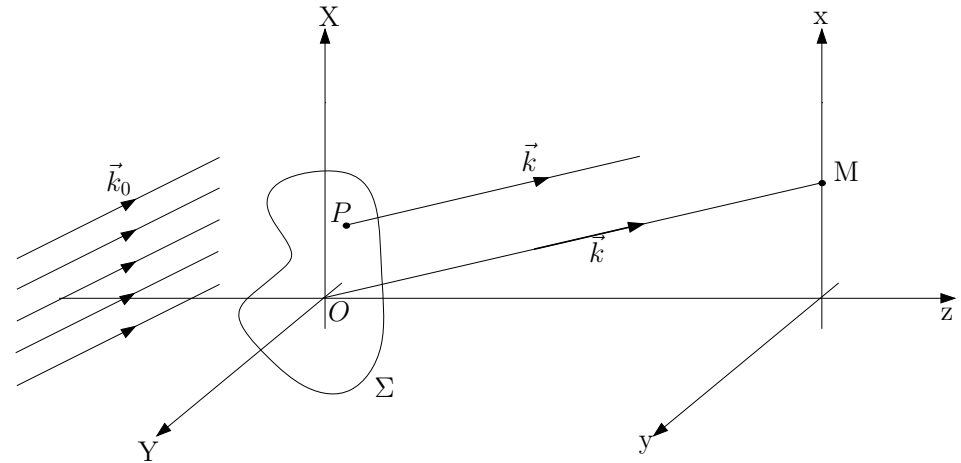


FIGURE 2.1 – Diffraction de Fraunhofer d'un écran Σ quelconque.

La diffraction de Fraunhofer s'obtient par exemple dans le cadre de la diffraction des ondes planes à l'infini, tel que représenté figure 2.1. En notant α_0 et β_0 les angles directeurs de l'onde incidente \vec{k}_0 (ou du vecteur \vec{SO} où S est le point source) et α et β ceux de l'onde diffractée \vec{k} (ou du vecteur \vec{OM} où M est le point d'observation), soit

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} x/D \\ y/D \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a montré au précédent TD que l'amplitude lumineuse au point M est

$$s(\mathbf{M}) = s'_0 \int t(X, Y) e^{-2i\pi[(\alpha - \alpha_0)\frac{X}{\lambda} + (\beta - \beta_0)\frac{Y}{\lambda}]} dX dY = \hat{t}\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\lambda}, \frac{\beta - \beta_0}{\lambda}\right). \quad (\text{II.1})$$

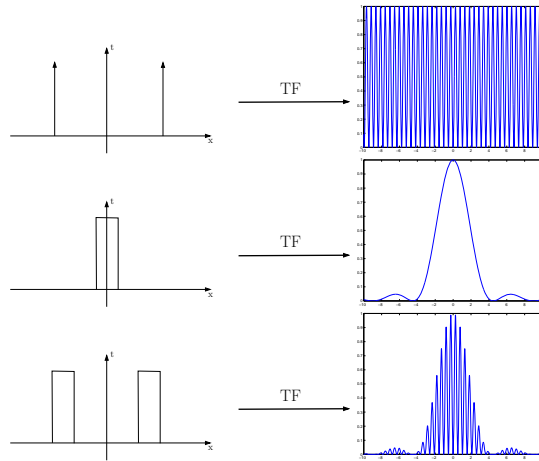


FIGURE 2.2 – Une bifente d'Young de largeur finie est la convolution de deux fentes infiniment fines et d'une fente de largeur finie. La figure d'interférence finale est donc une sinusoïde modulée par un sinus cardinal.

L'amplitude en M est ainsi donnée par la transformée de Fourier 2D, \hat{t} , de la fonction de transparence, $t(X, Y)$, calculée aux fréquences spatiales $(\alpha - \alpha_0)\lambda^{-1}$ et $(\beta - \beta_0)\lambda^{-1}$. Le « centre » de la transformée de Fourier, *i.e.* le point de fréquences spatiales nulles, correspond au centre de l'image géométrique de la source, où $\alpha = \alpha_0$ et $\beta = \beta_0$.

On illustre figure 2.2 le lien de transformée de Fourier entre l'objet et sa tache de diffraction sur l'exemple d'une bifente d'Young. Les fentes ayant une largeur finie, la fonction de transparence de la bifente peut s'écrire

$$t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) g(x - u) du = (f \otimes g)(x), \quad (\text{II.2})$$

où $f(x)$ est le profil d'une fente unique, par exemple une fonction porte, et $g(x)$ donne la répartition des fentes, ici $g(x) = \delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)$, avec a la distance entre les des deux fentes. En utilisant alors le fait que

$$\boxed{\text{TF}(f \otimes g) = \text{TF}(f) \cdot \text{TF}(g)},$$

on trouve aisément que la figure de diffraction d'une bifente est le produit de la figure de diffraction d'une fente unique $[\text{TF}(f)]$, *i.e.* un sinus cardinal, par la figure de diffraction des pics de Dirac distants de a , *i.e.* une sinusoïde de fréquence $\propto a$. On retrouve bien le résultat trouvé au TD *Interférences – Notion de cohérence*.

2. Expérience d'Abbe

Soit un objet éclairé par une onde plane en incidence normale. On fait l'image de cet objet dans un plan noté P_2 avec une lentille. Dans le plan focal de cette lentille, on observe la figure de diffraction à l'infini de l'objet, *i.e.* la transformée de Fourier de sa fonction de transparence. On appelle ce plan *plan de Fourier*, noté Π' . La figure observée dans le plan P_2 est donc elle-même la transformée de Fourier (inverse) de la figure de diffraction observée dans le plan de Fourier (voir FIG. 2.3).

Si l'on introduit dans le plan de Fourier un nouvel objet de transmittance bien choisie, on manipule la transformée de Fourier de l'image observée dans le plan P_2 , et l'on manipule donc l'image elle-même. On peut ainsi, par exemple, **filtrer** certaines fréquences spatiales de l'objet pour n'en conserver que d'autres.

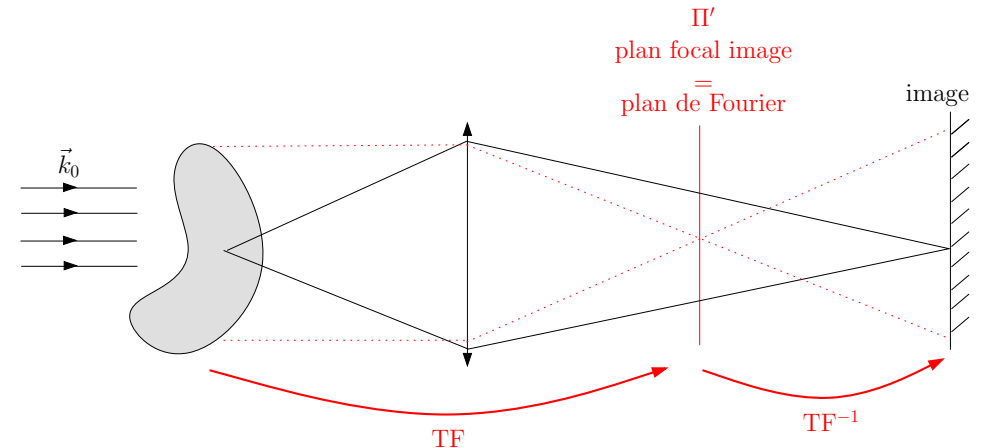


FIGURE 2.3 – Diffraction de Fraunhofer d'un écran Σ quelconque.

Si un objet a des fréquences spatiales faibles (variations de $t(X, Y)$ lentes), sa tache de diffraction est petite, au centre de l'écran. Inversement, la tache de diffraction présente des composantes éloignées du centre de la figure si l'objet présente des variations spatiales rapides. On peut donc «filtrer» les variations lentes de $t(X, Y)$ dans l'écran d'observation en bloquant une zone centrale du plan de Fourier avec un écran opaque.

On considère un réseau \mathcal{R} de pas a . Sa figure de diffraction, dans Π' , est constituée de pics en $x = n\frac{\lambda}{a}$, $n \in \mathbb{Z}$. On veut avoir, sur l'écran en P_2 , un réseau de pas deux fois plus petit, soit $a \rightarrow a/2$. Les pics de la figure de diffraction de ce «nouveau»

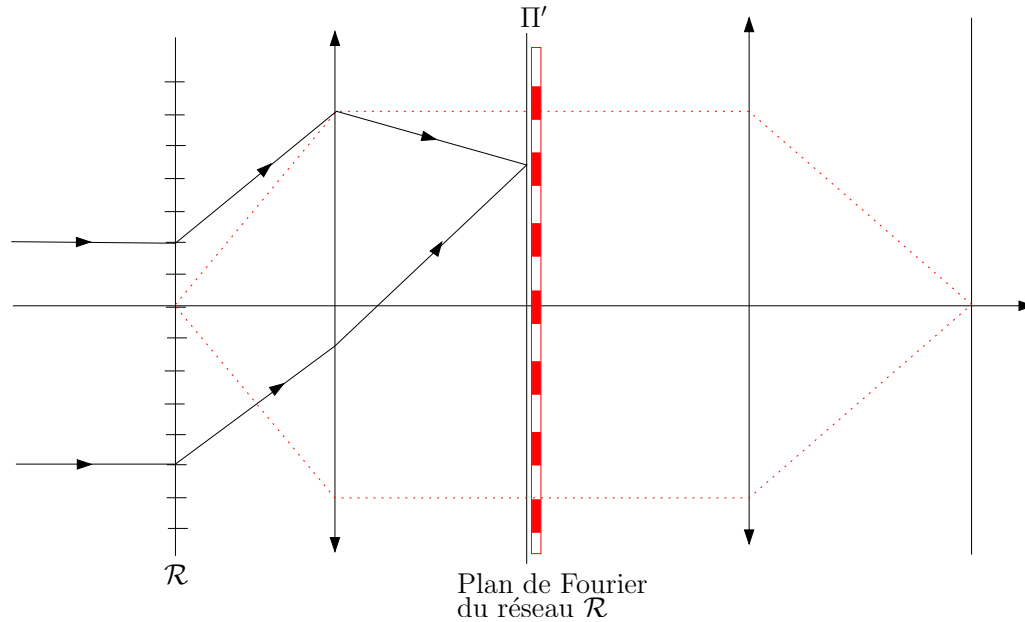


FIGURE 2.4 – Principe de l'expérience d'Abbe.

réseau seraient donc situés en $x = n \frac{\lambda}{a/2} = 2n \frac{\lambda}{a}$: les pics sont deux fois plus espacés que dans la figure de diffraction du réseau initial. On doit se débrouiller pour avoir cette figure de diffraction dans Π' pour reconstruire l'objet (le réseau \mathcal{R}') dans l'écran d'observation. On cache donc un pic sur deux dans l'espace de Fourier : l'objet Σ à placer en Π' est un réseau de pas $2n \frac{\lambda}{a}$.

Pour obtenir un réseau \mathcal{R}' sinusoïdal, on garde seulement les fréquences spatiales correspondant aux ordres 0 et ± 1 .

Pour obtenir un réseau «sur fond noir», c'est-à-dire observer seulement les changements d'intensité (les «détails»), il faut cacher le pic central (Cf. Strioscopie).

3. Visualisation d'un objet de phase

Les objets caractérisés par des variations d'indice ou d'épaisseur sont appelés «objets de phase». Ces objets, parfaitement transparents, ne présentent pas de contraste avec le champ qui les entoure, c'est-à-dire qu'ils sont invisibles par les méthodes d'imagerie ordinaires, car ils sont caractérisés seulement par des variations du chemin optique et non par des variations d'amplitude ($|t(X, Y)| = 1$). Sans rien faire,

l'éclairement est donc uniforme sur l'écran d'observation.

Les variations spatiales de phase font toutefois apparaître une figure de diffraction dans le plan Π' . Le principe de la strioscopie consiste à filtrer l'image géométrique dans le plan de Fourier. Si on place un petit écran opaque au centre du plan de Fourier, les fréquences spatiales les plus basses sont filtrées. En fait, on cherche à bloquer toute la lumière qui arriverait à l'écran si l'objet de phase n'était pas présent. En présence de l'objet de phase, la lumière diffractée, correspondant aux fréquences spatiales non nulles, n'est pas bloquée par le petit écran dans le plan de Fourier Π' . Finalement, seule la lumière diffractée parvient à l'écran. Les variations de phase, et donc l'objet de phase, deviennent visibles.

Remarque : débramage On considère une image avec un bruit à haute fréquence, telle qu'une image pixelisée. On peut utiliser le dispositif précédent, mais avec un diaphragme à la place du point opaque, pour filtrer les hautes fréquences spatiales, par exemple celles dues à la pixellisation de l'image. Après filtrage, les pixels (de hautes fréquences) sont alors «gommés» et on obtient une image de meilleure qualité.

Strioscopie et contraste de phase On reprend le raisonnement qualitatif précédent expliquant le principe de la strioscopie, de façon plus quantitative. Sans écran dans le plan de Fourier, la vibration lumineuse sur l'écran d'observation est

$$s = s_0 e^{i\varphi},$$

où φ est la phase introduite par l'objet de phase au point considéré. On peut toujours décomposer la vibration lumineuse selon

$$s = \underbrace{s_0 (e^{i\varphi} - 1)}_{\text{ondes diffractées}} + \underbrace{s_0}_{\text{ondes directes}}.$$

S'il n'y a pas d'objet de phase, l'éclairement est uniforme, sans déphasage, soit une vibration lumineuse $s = s_0$. Si on bloque les très basses fréquences spatiales dans le plan de Fourier, alors on retire s_0 de la vibration lumineuse sur l'écran d'observation (les ondes non diffractées), et on obtient finalement une vibration

$$s = s_0 (e^{i\varphi} - 1).$$

Si on suppose que la phase φ est faible devant 2π , alors $e^{i\varphi} - 1 \approx i\varphi$, d'où l'expression de l'intensité lumineuse sur l'écran d'observation

$$I = I_0 \varphi^2.$$

On observe donc les variations de phase sur un fond noir ($I = 0$ si $\varphi = 0$) : le contraste est maximal et toujours égal à 1. L'inconvénient de cette méthode est la faible intensité des images obtenues : si φ est petit, φ^2 l'est plus encore ! De plus, on n'a accès qu'à la norme de φ , et son signe reste inconnu.

L'imagerie par *contraste de phase* est une autre technique permettant de remonter au signe de la phase. Au lieu d'avoir un petit écran opaque au foyer de la lentille, on place une petite lame à retard $\lambda/4$ introduisant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ (Cf. TP *Polarisation*). On reprend le même raisonnement que précédemment : l'onde sur l'écran d'observation peut s'écrire sous la forme

$$s = \underbrace{s_0(e^{i\varphi} - 1)}_{\text{ondes diffractées}} + \underbrace{s_0}_{\text{ondes directes}}.$$

Si l'on introduit la lame $\lambda/4$, alors les ondes non diffractées accumulent une phase $\pi/2$ supplémentaire et

$$s = s_0(e^{i\varphi} - 1) + s_0 e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Les deux composantes interfèrent. Si l'on suppose une nouvelle fois que la phase φ est petite, alors

$$s = s_0(i\varphi - i) = -is_0(1 - \varphi),$$

d'où une intensité

$$I = I_0(1 - 2\varphi),$$

car φ^2 est négligeable. On peut donc mesurer directement φ avec cette méthode. On a ici une image avec un contraste égal à 2φ (d'où le nom de la technique).

Contrairement à la strioscopie, le contraste est donc faible. On peut toutefois augmenter la sensibilité en rendant la lame de phase absorbante. Supposons qu'elle réduise l'intensité de la lumière directe par un facteur β , on a alors

$$I = I_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} - \varphi \right)^2 = \frac{I_0}{\beta} (1 - 2\varphi\sqrt{\beta}),$$

et donc un contraste

$$C = \varphi\sqrt{\beta}.$$

Le contraste est multiplié par $\sqrt{\beta}$.

1. Il faut donc a priori utiliser une source monochromatique, ou une lame à retard à bande large.

L'imagerie par contraste de phase est employée en microscopie. Les microscopes à contraste de phase sont utilisés dans les laboratoires de biologie car ils permettent d'étudier les objets vivants sans les colorer et donc sans les tuer.

EXERCICE III DIFFRACTION DES RAYONS X PAR LES SOLIDES

1. Pour avoir une figure de diffraction notable, il faut

- $\lambda >$ taille atomique, pour que la diffraction soit traitable dans l'approximation où l'on néglige les effets de bord de l'élément diffractant (mouvement électroniques dans l'atome...),
- $\lambda \sim d_{\text{atome-atome}}$ pour avoir des angles de diffraction notables.

Dans un cristal, $d_{\text{atome-atome}} \sim$ quelques Angströms. Dans le cas du rayonnement électromagnétique, $\lambda \sim 1 \text{ \AA}$ correspond aux rayons X ($\nu \sim 10^{18}$ Hz). Ils sont produits par ralentissement d'électrons envoyés sur une cible métallique (Brehmstrahlung). Le spectre produit est large.

On peut aussi utiliser des ondes de matière :

- **électrons** : On a $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ et la longueur d'onde associée (longueur d'onde de de Broglie)

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}},$$

où E est l'énergie de la particule. Il faut donc avoir un jet monocinétique pour éviter d'avoir une largeur spectrale importante. Par exemple, on peut accélérer des électrons *via* une différence de potentiel U . Alors $E = eU$ et

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2me}\sqrt{U}} \sim 10^{-9} \left(\frac{U}{1\text{V}} \right)^{-1/2} \text{ m.}$$

Il faut donc typiquement $U \sim 100 \text{ V}$, ce qui est facile à réaliser.

Les électrons sont des particules chargées, elles interagissent fortement avec la matière, et donnent principalement des informations sur la surface.

- **neutrons** : Pour des neutrons thermiques, on a

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2}k_B T,$$

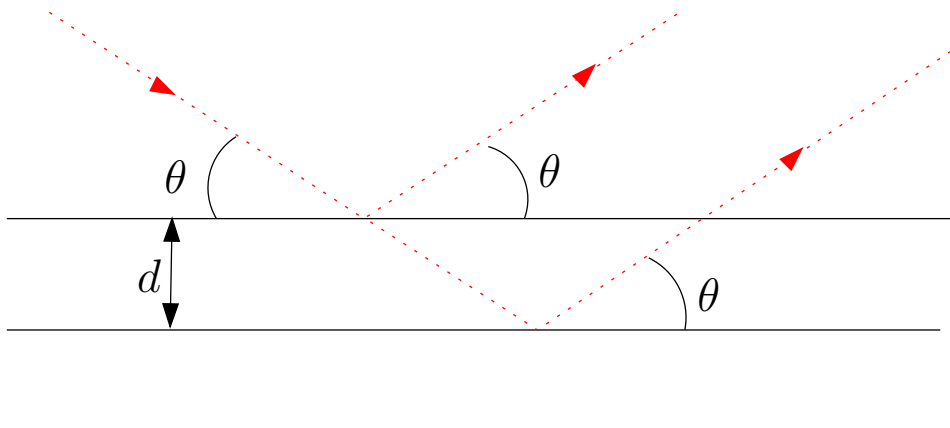


FIGURE 3.1 – Modèle de Bragg.

soit

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} \sim \text{quelques } 10^{-10} \text{ m à } 300\text{K.}$$

L'avantage des neutrons est qu'ils sont neutres et donc pénètrent plus efficacement dans la matière que les électrons. De plus, ils ont un moment magnétique non nul et donnent donc des informations sur les moments magnétiques des noyaux sondés.

2. On simplifie le problème en considérant que le cristal est formé de plans équidistants, et que ces plans réfléchissent la lumière. Le modèle de Bragg est un modèle simple qui permet de comprendre ce qu'il se passe. Deux plans successifs forment alors un système équivalent à une lame d'air (Cf. TD *Interférence*). On a donc, pour les rayons lumineux réfléchis entre deux plans successifs, une différence de marche

$$\delta = 2d \sin \theta,$$

pour une onde arrivant avec une incidence θ par rapport aux plans, distants de d . Les interférences sont constructives dans les directions où

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

C'est ce qu'on appelle la *condition de Bragg*.

La répartition des pics de diffraction permet de remonter à d . Pour le mesurer, on peut soit faire varier la longueur d'onde λ , soit l'angle d'incidence θ (méthode du cristal tournant, méthode des poudres).

3. Conditions de Laue.

On note

$$\vec{R}_{l,m,n} = l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}, \quad (l, m, n) \in \mathbb{Z}^3$$

la position d'un élément diffractant, où $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ sont les vecteurs de base de la maille élémentaire.

Pour une onde plane incidente de direction \vec{k}_0 , l'onde diffractée à l'infini, dans la direction \vec{k} , s'écrit (Cf. TD *Diffraction (1)*) : *diffraction par un ensemble de N structures*)

$$s_\infty \propto \underbrace{\left(\int_{1 \text{ motif}} t(x, y, z) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{OP}} d\vec{OP} \right)}_{\text{facteur de forme}} \cdot \underbrace{\sum_{l,m,n} e^{-i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{R}_{l,m,n}}}_{=S, \text{ facteur de structure}}.$$

En utilisant l'expression de $\vec{R}_{l,m,n}$, et avec $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$, le facteur de structure se réécrit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{l,m,n} e^{i\Delta\vec{k} \cdot (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c})}, \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \left(e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{a}} \right)^l \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \left(e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{b}} \right)^m \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{c}} \right)^n, \end{aligned}$$

donc, avec S_0 un facteur de phase,

$$S = S_0 \frac{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{a}}{2} L\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{a}}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{b}}{2} M\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{b}}{2}\right)} \frac{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{c}}{2} N\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\vec{k} \cdot \vec{c}}{2}\right)}.$$

On obtient un pic de diffraction à chaque fois que les *conditions de Laue*, données ci-dessous, sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{k} \cdot \vec{a} &= 2n_1\pi \\ \Delta\vec{k} \cdot \vec{b} &= 2n_2\pi, \quad (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3. \\ \Delta\vec{k} \cdot \vec{c} &= 2n_3\pi \end{aligned}$$

On retrouve la condition de Bragg en considérant un plan réticulaire formé par Oxy , avec $\vec{c} \parallel Oz$. On considère l'ordre 0 pour x et y ($\Delta k_x = \Delta k_y = 0$, réflexion dans le plan d'incidence), et alors

$$\Delta k_z = k_0 (\sin \theta - \sin(-\theta)) = 2k_0 \sin \theta = 2\pi \frac{n_3}{\|\vec{c}\|},$$

soit la relation de Bragg

$$2\|\vec{c}\| \sin \theta = n\lambda.$$

Remarque : Notion de réseau réciproque². Le réseau réciproque \mathcal{R}^* du réseau \mathcal{R} est défini par les vecteurs de maille élémentaire $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$, tels que

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{a} &= 2\pi, & \vec{B} \cdot \vec{b} &= 2\pi, & \vec{C} \cdot \vec{c} &= 2\pi, \\ \vec{A} \cdot \vec{b} &= \vec{A} \cdot \vec{c} = \vec{B} \cdot \vec{a} = \vec{B} \cdot \vec{c} = \vec{C} \cdot \vec{a} = \vec{C} \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

On peut par exemple écrire

$$\vec{A} = 2\pi \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}, \quad \vec{B} = 2\pi \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})}, \quad \vec{C} = 2\pi \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}.$$

Pour satisfaire les conditions de Laue, on doit avoir $\Delta \vec{k} \in \mathcal{R}^*$: $\Delta \vec{k}$ doit faire partie du réseau réciproque.

Pour plus de précisions sur l'utilisation du réseau réciproque, se reporter au cours de Physique des Solides, ainsi qu'à la bibliographie usuelle (Ashcroft et Mermin, Kittel, Guinier...).

2. Cf. Kittel p55-56.