SORBONNE UNIVERSITÉS

Année universitaire 2016-2017
U.E. 2P021

Electromagnétisme et électrocinétique

Exercices Supplémentaires

Cédric Enesa (LKB)

Partie II : Théorème de Gauss

Table des matières

1 Sphère creuse **3**

2 Cable coaxial **4**

3 Atome d'hydrogène **5**

4 L'orage **6**

5 Analogie avec la gravitation. Stabilité de la naine blanche. **7**

1 Sphère creuse

On considère une sphère de centre O, de rayon R avec une densité volumique de charge ρ uniforme.

1. Etudier les invariances et les symétries du système. En déduire la dépendance et l'orientation de $\vec{E}$.
2. A l'aide du théorème de Gauss, établir l'expression de $\vec{E}$.

On considère une sphère creuse de centre O, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 avec une densitè volumique de charge ρ.

3. A l'aide du théorème de superposition déterminer le champ électrostatique dans chacune des régions.
4. En faisant tendre R_1 vers R_2, la sphère creuse s'apparente à une coquine sphérique avec une densité surfacique de charge σ uniforme. Exprimer σ.

2 Cable coaxial

On considère une cylindre de centre O, de rayon R et de longueur L avec une densité surfacique de charge σ uniforme.

1. Etudier les invariances et les symétries du système. En déduire la dépendance et l'orientation de $\vec{E}$.
2. A l'aide du théorème de Gauss, établir l'expression de $\vec{E}$.

On considère une cable coaxial de longueur L constitué de deux conducteurs cylindriques. Le conducteur intérieur (l'âme) a un rayon R_1 tandis que le conducteur extérieur a un rayon R_2. On applique une tension V aux bornes du cable. L'ensemble consitue donc un condensateur donc le conducteur central (extérieur) porte la charge σ $(-\sigma)$.

3. A l'aide du théorème de superposition déterminer le champ électrostatique dans chacune des régions.
4. En déduire l'expression du potentiel électrostatique. On prendra le potentiel nul à l'infini.
5. Calculer l'énergie électrostatique emmagasinnée dans le cable coaxial. On rappelle que la densité d'énergie électrostatique vaut $U = 1/2\epsilon_0 E^2$. En déduire la capacité du cable coaxial.

3 Atome d'hydrogène

On considère le potentiel dit de Yukawa $\Phi(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}$ (a représente la taille typique de l'atome).

1. Déterminer le champ électrostatique associé à ce potentiel.
2. Calculer la charge Q_e contenue dans une sphère de rayon R associée à ce potentiel. Etudiez les cas limites $R \to +\infty$ et $R \to 0$.
3. Déduire de la question 2 la densité volumique de charge $\rho(r)$ associée au potentiel de Yukawa.

L'atome d'hydrogène peut être modélisé par une charge ponctuelle $+q$ (qui réprésente le noyau) et la densité volumique de charge $\rho(r)$ (qui représente l'électron).

4. Rappeler le potentiel et le champ électrostatique crée par une charge ponctuelle $+q$.
5. A l'aide du principe de superposition, établir le champ électrostatique ressenti par une charge ponctuelle localisé en un point M hors de l'atome. Que devient cette expression lorsque le point M est proche de l'atome (à une distance d du même ordre de grandeur que a) ? loin de l'atome (lorsque $d \gg a$) ?

   On peut donc voir à l'aide de ce modèle simple deux phénomènes intéressants : à grande distance, un atome apparait comme une particule neutre tandis qu'à courte distance, les effets électrostatiques se manifestent.

4 L'orage

La Terre

Même en dehors des périodes d'orages, la terre possède un champ électrostatique permanent. En effet, la terre et la partie haute de l'atmosphère (la ionosphère) se comportent comme un gigantesque condensateur sphérique : le sol et l'ionospère étant les armatures du condensateur tandis que la partie basse de l'atmosphère joue le rôle d'isolant (figure 1).

1. On considère une sphère de rayon R ayant une densité surfacique uniforme de charge σ. Etudiez les invariances et les symétries du système. En déduire la direction et la dépendance de $\vec{E}$ puis calculer $\vec{E}$ en fonction de R,σ et ϵ_0.
2. Déduire de la question 1 le champ électrostatique en fonction de l'altitude z. Sachant que $\vec{E}$ est de l'ordre de $|\vec{E}| = 100\,\mathrm{V.m^{-1}}$, évaluez la charge totale Q_{tot} présente sur chacune des armatures puis σ.
3. Calculer le potentiel V dont est issu $\vec{E}$. Sachant que pour un condensateur la différence de potentiel entre les deux armatures $\Delta V = CQ_{tot}$, donner un ordre de grandeur de C.

Les orages

En réalité, la partie basse de l'atmosphére n'est pas un isolant parfait. Cela induit un courant de fuite entre l'ionosphère et le sol. Deux mécanismes permettent d'éviter la décharge du sol : Le mouvement des particules chargées (des ions) et les orages.

On considère une particule chargée de charge q et de masse m se déplacant dans le champ électrostatique $\vec{E}$.

4. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $\vec{v}$ de la particule (on modélisera les frottements de l'air par une force $\vec{f_{frott}} = -\alpha\vec{v}$).

Lors d'un orage, la répartition des charges positives et négatives (et donc la direction du champ électrique) est inversée par rapport à son état habituel (fig. 2).

5. Lors d'un orage la différence de potentiel ΔV atteint $10^8\,\mathrm{V}$. Calculez la nouvelle valeur de $\vec{E}$ ainsi que de Q_{tot}.

Les orages permettent donc de recharger négativement la terre.

[1]

données : $R_T = 6000\,\mathrm{km}$, $z_0 = 10\,\mathrm{km}$, $z_1 = 1\,\mathrm{km}$

1. plus d'informations sur la foudre, les orages et les mécanismes autour disponibles à l'adresse *http : //culturesciencesphysique.ens − lyon.fr/ressource/QRorages.xml*

5 Analogie avec la gravitation. Stabilité de la naine blanche.

1. En utilisant l'expression de l'intéraction coulombienne et de la force gravitationnelle, proposez une analogie entre les grandeurs caractéristiques de ces deux intéractions.
2. Toujours par analogie, déduisez le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel $\vec{g}$ (équivalent du champ électrique $\vec{E}$)

On considère maintenant une sphère uniformément chargée de rayon R et de densité volumique de charge ρ_e)

3. Après avoir étudié les symétries du système pour déterminer la dépendance et l'orientation de $\vec{E}$, calculer le champ électrique crée par la densité ρ_e.
4. Déduire de la question 3, le champ gravitationnel crée par une sphère de rayon R et de densité volumique de charges ρ.
5. La densité d'énergie électrique est égale à $\frac{\epsilon_0}{2}|E|^2$. A l'aide de la question 1, trouvez une relation analogue pour la densité d'énergie potentielle de gravitation . En déduire l'énergie potentielle de gravitation $\mathcal{E}_p$ d'une étoile de rayon R.
6. **Bonus** : Dans le cas d'une naine blanche (une étoile de forte densité), la contraction gravitationnelle (qui tend à faire s'effondrer l'étoile sur elle-mÃªme) est compensée par l'interaction entre les électrons (dûe au principe d'exclusion de Pauli), l'équilibre étant atteint pour un rayon R. En admettant que l'énergie E_e des N électrons contenus dans la naine blanche est égale à : $\frac{3}{10}Np_e^2$ (p_e étant l'impulsion moyenne des électrons) et que $\frac{\partial p_e}{\partial R} = -\frac{p_e}{R}$, calculer $\frac{\partial E_{totale}}{\partial R} = \frac{\partial(E_p+E_e)}{\partial R}$. En déduire la valeur de R en fonction de la masse M de la naine blanche lorsque l'équilibre est atteint.