MÉCANIQUE QUANTIQUE

COURS 8 – OSCILLATEUR HARMONIQUE

QUENTIN GLORIEUX

3P001 – UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE 2015-2016

PLAN

- Oscillateur Harmonique
- Etats nombres
- Etats cohérents
- Etats comprimés

RAPPEL : OSCILLATEUR HARMONIQUE

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

On peut l'écrire avec des grandeurs sans dimensions en faisant le changement de variables suivant sur les observables :

$$\hat{X} = \hat{x}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \qquad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}$$

On a alors : $\hat{H} = \hbar\omega\,\hat{\mathcal{H}}$ avec $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$

Et la relation de commutation : $[\hat{X}, \hat{P}] = i$

OPÉRATEURS CRÉATION ET ANNIHILATION

On a $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{X}^2 + \hat{P}^2\right)$ que l'on cherche à factoriser.

On va étudier les quantités :

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

Le commutateur vaut : $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$

On définit l'opérateur nombre par $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{1}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2 - 1)$

Cet opérateur hermitien satisfait : $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ $\qquad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$

Et on peut écrire l'Hamiltonien : $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{N} + 1/2)$

UNE SECONDE APPROCHE

On part de l'Hamiltonien : $H = \frac{1}{2m}[p^2 + (m\omega x)^2]$

On souhaite le factoriser.

Si x et p étaient des nombres on aurait une relation de la forme :

$$u^2 + v^2 = (iu + v)(-iu + v)$$

Pour des opérateurs ce n'est pas si simple !

On étudie les opérateurs

$$\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \qquad \hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

Que vaut $\hat{a}_-\hat{a}_+$? $\quad \hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2] - \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}]$

COMMUTATION CANONIQUE

On a : $\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2] - \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}]$

Or on connaît la relation canonique entre x et p : $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$

On en déduit : $\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2] + \frac{1}{2}$

$$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2}$$

Soit : $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)$

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)$$

Que vaut $\hat{a}_+\hat{a}_-$? et $[\hat{a}_-, \hat{a}_+]$?

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$$

ETATS PROPRES $\hat{a}_+|\psi\rangle$

On peut écrire l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

Lemme : si $|\psi\rangle$ satisfait l'équation de Schrödinger avec la valeur propre E alors $\hat{a}_+|\psi\rangle$ est aussi solution avec la valeur propre $E + \hbar\omega$

Preuve :

$$\begin{aligned} H(a_+\psi) &= \hbar\omega\left(a_+a_- + \frac{1}{2}\right)(a_+\psi) = \hbar\omega\left(a_+a_-a_+ + \frac{1}{2}a_+\right)\psi \\ &= \hbar\omega a_+\left(a_-a_+ + \frac{1}{2}\right)\psi = a_+\left[\hbar\omega\left(a_+a_- + 1 + \frac{1}{2}\right)\psi\right] \\ &= a_+(H + \hbar\omega)\psi = a_+(E + \hbar\omega)\psi = (E + \hbar\omega)(a_+\psi). \end{aligned}$$

ETATS PROPRES $\hat{a}_-|\psi\rangle$

Lemme : si $|\psi\rangle$ satisfait l'équation de Schrödinger avec la valeur propre E alors $\hat{a}_-|\psi\rangle$ est aussi solution avec la valeur propre $E - \hbar\omega$

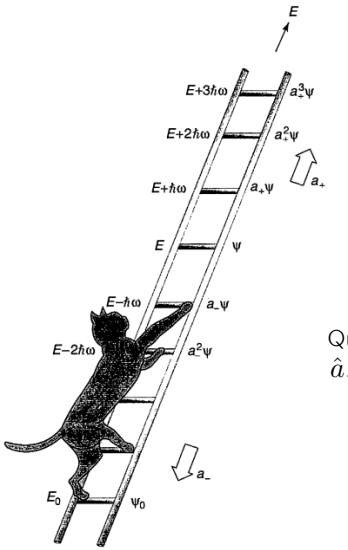
Preuve :

$$\begin{aligned} H(a_-\psi) &= \hbar\omega\left(a_-a_+ - \frac{1}{2}\right)(a_-\psi) = \hbar\omega a_-\left(a_+a_- - \frac{1}{2}\right)\psi \\ &= a_-\left[\hbar\omega\left(a_-a_+ - 1 - \frac{1}{2}\right)\psi\right] = a_-(H - \hbar\omega)\psi = a_-(E - \hbar\omega)\psi \\ &= (E - \hbar\omega)(a_-\psi). \end{aligned}$$

On a donc une « machine à générer des solutions ».

Il ne reste qu'à trouver une solution et on pourra générer les solutions d'énergies supérieures avec a+ et d'énergie inférieures avec a-

CRÉATION ET ANNIHILATION



Que se passe t'il lorsque l'on applique $\hat{a}_-$ de façon répétée ?

RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE

On atteint le dernier barreau de l'échelle : $\hat{a}_-|\psi_0\rangle = 0$

(les valeurs propres de $\hat{a}_+\hat{a}_-$ sont positives ou nulles)

On en déduit : $\dfrac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\dfrac{d}{dx} + m\omega\hat{x}\right)|\psi_0\rangle = 0$

ou $\dfrac{d|\psi_0\rangle}{dx} = -\dfrac{m\omega}{\hbar}\hat{x}|\psi_0\rangle$

donc : $\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$

que l'on normalise : $1 = |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar}\,dx = |A|^2\sqrt{\dfrac{\pi\hbar}{m\omega}}.$

soit $A^2 = \sqrt{m\omega/\pi\hbar},$ et $\psi_0(x) = \left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$

QUELLE EST L'ÉNERGIE DE L'ÉTAT $|\psi_0\rangle$

QUELLE EST L'ÉNERGIE DE L'ÉTAT $|\psi_0\rangle$

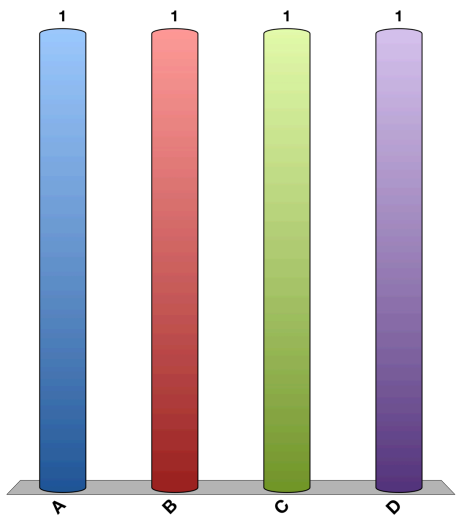
A. 0

B. E= $\hbar\omega$

C. E= $\hbar\omega/2$

D. E= $2\hbar\omega$

E. On ne peut pas donner l'énergie, seulement la probabilité de trouver telle valeur.



PREMIER ÉTAT EXCITÉ

On peut maintenant gravir l'échelle pour trouver tous les états excités de l'oscillateur harmonique.

On a : $\psi_n(x) = A_n(a_+)^n \psi_0(x), \quad \text{with } E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$

Normalisation pour le premier état excité ?

$$\psi_1(x) = A_1 a_+ \psi_0 = \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\frac{d}{dx} + m\omega x\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$= A_1\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

$$\int |\psi_1|^2\, dx = |A_1|^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2} dx = |A_1|^2$$

MÉTHODE ALGÉBRIQUE POUR LA NORMALISATION

On sait que $\hat{a}_+|\psi_n\rangle = c_n|\psi_{n+1}\rangle$

Comment déterminer le coefficient c_n ?

On définit l'opérateur nombre : $\hat{N} = \hat{a}_+\hat{a}_-$

Montrer que $\hat{N}|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle$ avec $|\psi_n\rangle$ solution de

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

avec $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

MÉTHODE ALGÉBRIQUE POUR LA NORMALISATION

On a : $\hat{a}_+|\psi_n\rangle = c_n|\psi_{n+1}\rangle$

Calculez $|\hat{a}_+|\psi_n\rangle|^2$

On en déduit $\hat{a}_+|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$

Calculez $|\hat{a}_-|\psi_n\rangle|^2$

On en déduit $\hat{a}_-|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle$

En déduire $|\psi_n\rangle$ en fonction de $|\psi_0\rangle$

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\hat{a}_+^n|\psi_0\rangle$$

ETATS NOMBRES

On appelle les états nombres les états propres de l'Hamiltonien.

Ce sont également les états propres de $\hat{N} = \hat{a}_+\hat{a}_-$

On les note $|\psi_n\rangle = |n\rangle$

Calculez

- <E>
- ΔE
- <x>
- <p>
- ΔXΔP

$$\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$$

$$\hat{a}_+|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle$$

$$\hat{a}_-|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|\psi_{n-1}\rangle$$

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$$

ETATS COHÉRENTS

On définit les états cohérents comme les états propres de l'opérateur d'annihilation :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

- Déterminez l'expression d'un état cohérent sur la base des états nombres.
- Calculez
  - <E>
  - ΔE
  - <x>
  - <p>
  - ΔxΔp
- Donnez l'évolution temporelle d'un état cohérent